

## DER PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE. BAND XVIII.

**I. Ueber die galvanische Ausmessung der  
Windungsfläche einer Drahtspule;  
von F. Kohlrausch.**

(Der k. Ges. d. Wiss. zu Göttingen im Auszuge mitgetheilt am 5. Aug. 1882.)<sup>1)</sup>

Zu den wichtigsten galvanischen Constanten eines Stromleiters gehört diejenige, welche die Fernwirkung des Stromes bestimmt, das ist die Maximalprojection der von dem Leiter umschlossenen Fläche. Deren Ausmessung ist in den letzten Jahren mehrfach discutirt worden.<sup>2)</sup> Man hat naturgemäss

1) Veranlasst durch die oben citirte Mittheilung hat Hr. F. Hirst ein sinnreiches Verfahren beschrieben, welches die zu messende Windungsfläche einer Spule mittelst bifilarer Aufhängung auf eine bekannte Windungsfläche zurückführt. (Ber. naturforsch. Ges. Freib. i. B. 8. p. 2. 1882). Dieses Verfahren würde in der That einen Vortheil bieten, dass man nämlich im homogenen magnetischen Felde arbeitet, und dass daher keine Correctionen hereintreten. Auch spart man Abstandsmessungen. Dafür aber muss ausserdem ein Galvanometer beobachtet werden. Ferner scheinen mir zwei Nachtheile vorzuliegen. Erstens ist die geometrische Ausmessung einer Normalfläche unstreitig weniger genau als unsere Ausmessung eines Halbmessers der Tangentenbussole. Dann aber beschränkt sich das Verfahren offenbar auf Flächen, die einander nicht zu sehr ungleich sind, weil sonst die Ausschläge ebenfalls eine ungünstige Ungleichheit erhalten. Unser Verfahren regulirt diesen Umstand durch die Entfernung. Da nun sehr grosse Normalflächen schwierig herstellbar sein werden, so scheint das Bifilarverfahren höchstens bei kleinen Flächen anwendbar zu sein. Ja, Spulen, wie sie zu Erdinductoren verwendet werden, genügend empfindlich bifilar und zugleich hinreichend frei von elastischer Nachwirkung aufzuhängen, dürfte überhaupt nicht leicht sein.

2) Siemens, Pogg. Ann. 127. p. 332. 1866; Rowland, Sill. Journ. 15. p. 288. 1878; G. Wiedemann, Electrotechn. Z. S. 3. p. 261. 1882; Heintz. Weber, der Rotationsinductor, p. 40, Teubner 1882; Rayleigh u. Schuster, Proc. Roy. Soc. Nr. 213. p. 127. 1881; Rayleigh, Phil. Trans. 1882. 2. p. 672.

Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XVIII.

die Fläche eines Solenoids berechnet entweder aus der gesammten Drahtlänge in Verbindung mit der Windungszahl und Gestalt des Solenoides, oder man hat die einzelnen Durchmesser mit dem Bandmaass oder dem Kathetometer bestimmt. Diese Messungen an sich lassen sich ohne Zweifel mit grosser Genauigkeit bewerkstelligen.

Ob aber die Windungsfläche selbst mit der gleichen Genauigkeit erhalten wird, hängt von einigen schwer übersehbaren Umständen ab. Man hat eingewandt, dass die Windungen der oberen Schichten sich in die Vertiefungen der unteren einlegen. Die neuesten Messungen von *Heinr. Weber* und von *Rayleigh* und *Schuster* ziehen dieses Einsinken in Rechnung. Ferner aber hat man noch das Bedenken erhoben, dass die unteren Drahtschichten durch die oberen zusammengedrückt werden, was besonders wegen der Nachgiebigkeit des Isolationsmittels möglich sein würde.

Als ein Mangel dieser Messungen muss endlich erwähnt werden, dass man nicht nach ihrer Beendigung eine Controlle eintreten lassen kann; dass auch eine Veränderlichkeit der Rolle mit der Zeit kaum anders nachgewiesen werden könnte als durch Abwinden des Drahtes und somit durch die Zerstörung der Spule.

Wenn nun eine solche Messung auch geometrisch richtig ausgeführt wäre, so würde dieselbe doch galvanisch werthlos bleiben, falls die Isolirung der Windungen durch schadhafte Stellen oder auch durch eine Spur von Leitungsvermögen des Isolierungsmittels unvollkommen ist. Mag der Fall auch unwahrscheinlich sein, unmöglich ist er nicht, und ein Schutzmittel dagegen erscheint sehr wünschenswerth.<sup>1)</sup>

Ohne Zweifel also würde ein Verfahren der Flächenmessung, welches diesen Bedenken nicht unterworfen ist, von Werth sein. Ich glaube, dass die hier zu beschreibende galvanische Methode, welche obendrein viel einfacher ist als die geometrische, keinen Bedenken unterliegt und einer

1) Ich meine, man sollte, um doch bis zu einem gewissen Grade die Isolation prüfen zu können, eine Spule immer aus zwei miteinander gewundenen oder vielleicht besser schichtenweise abwechselnden Drähten herstellen, wenn auch das Verfahren mühsamer ausfällt.



grossen Genauigkeit fähig ist. Mindestens wird dieselbe als Controle der geometrischen Ausmessung und der Unveränderlichkeit der Spule willkommen sein.

Die Flächenmessung der Spule hat unter anderem den Zweck, die Fernwirkung eines Stromes in der Spule zu berechnen. Offenbar kann man umgekehrt aus einer gemessenen Fernwirkung des Stromes die Flächengrösse ermitteln. Letzteres ist in sehr einfacher Weise ausführbar.

Denn die Fernwirkung des Stromes auf eine Magnetnadel lässt sich mit der erdmagnetischen Horizontalintensität in bekannter Weise vergleichen. Mit demselben Erdmagnetismus aber wird mittelst der Tangentenbussole auf dem von Weber zuerst gegebenen Wege<sup>1)</sup> eine Stromstärke verglichen. Somit lässt sich mittelst eines Stromes die Messung einer Windungsfläche auf eine Ausmessung der Tangentenbussole zurückführen, wenn ein und derselbe Strom beide Objecte durchfliesst.

Die Ausmessung einer Tangentenbussole aber bietet keine Schwierigkeit, wenn man sich auf eine einzige Windung oder wenigstens auf eine einzige Windungslage beschränkt. Formen der Tangentenbussole, welche gut ausmessbar sind, finden sich u. A. von mir in diesen Annalen<sup>2)</sup> beschrieben.

#### 1. Uebersicht der Methode.

Einer und derselbe Strom werde durch die Spule und die Tangentenbussole geleitet. Beide Instrumente sollen folgende Stellung gegeneinander haben.

Die Spulenaxe sei jedenfalls ostwestlich gerichtet. Der Mittelpunkt der Spule habe einen Abstand  $a$  von der Nadel der Tangentenbussole. Der Spulenmittelpunkt möge liegen entweder

östlich oder westlich von der Nadel (erste Hauptlage),  
oder nördlich oder südlich von der Nadel (zweite Hauptlage).

1) Weber, Result. d. magn. Vereins 1840, p. 83.

2) F. Kohlrausch, Pogg. Ann. 138. p. 7. 1869 u. Wied. Ann. 15. p. 552. 1882.

Es sei  $i$  die Stromstärke,  $\varphi$  die Ablenkung der Nadel durch den Strom,  $M$  der Nadelmagnetismus,  $R$  der Halbmesser der Tangentenbussole,  $F$  die Windungsfläche der Spule.

Dann übt der Strom in der Tangentenbussole auf die Nadel das Drehungsmoment aus:

$$(1) \quad i M \frac{2\pi}{R} \cos \varphi.$$

In der ersten Hauptlage ist die Wirkung der Spule auf die Nadel:

$$(2) \quad 2 i M \frac{F}{a^3} \cos \varphi,$$

in der zweiten Hauptlage fällt der Factor 2 weg.

Endlich bewirke der Erdmagnetismus und der Aufhängefaden zusammen auf die Nadel das Drehungsmoment:

$$(3) \quad -CM \sin \varphi.$$

Die Ablenkung  $\varphi$  entspreche also einem Zusammenwirken des Stromes in der Spule und in der Tangentenbussole im gleichen Sinne. Wenn der Strom nur in letzterer gewendet wird, so entstehe die Ablenkung  $\varphi'$ , welche negativ zu nehmen ist, falls sie nach der anderen Seite stattfindet als  $\varphi$ . Dann hat man:

$$\left(2 \frac{F}{a^3} + \frac{2\pi}{R}\right) i = C \operatorname{tg} \varphi, \quad \left(2 \frac{F}{a^3} - \frac{2\pi}{R}\right) i = C \operatorname{tg} \varphi'.$$

Hieraus findet man die gesuchte Windungsfläche:

$$(4) \quad F = \frac{a^3 \pi}{R} \frac{\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \varphi'}{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi'}.$$

In der zweiten Hauptlage tritt rechts der Factor 2 hinzu.

Wir haben hier vorausgesetzt,  $a$  sei so gross, dass die Dimensionen der Spule nicht berücksichtigt zu werden brauchen. Dies kann bei dünnadrätigen Spulen von vielen Windungen vorkommen, wird aber meistens nicht zutreffen. Es ist nämlich dazu nothwendig, dass man das Quadrat der Spulendimensionen gegen das Quadrat des Abstandes  $a$  vernachlässigen darf.

Im Folgenden soll diese Beschränkung aufgegeben und zu diesem Zwecke erst die Wirkung der Spule aus geringeren

Abständen in einen rechnerisch bequemen Ausdruck entwickelt werden.

Auch die Berechnung der Wirkung der Tangentenbussole bedarf bekanntlich einiger Correctionen.

2. Fernwirkung einer Spule auf einen Punkt in ihrer Axe  
(erste Hauptlage).

Die Länge einer Spule sei  $2s$ , der innere Halbmesser  $r_0$ , der äussere  $r_1$ <sup>1)</sup>; die Spule enthalte  $m$  Lagen von je  $n$  Windungen. Die gesammte vom Draht umschlossene Fläche  $F$  ist also:

$$F = n \int_{r_0}^{r_1} \pi r^2 \frac{m}{r_1 - r_0} dr = \frac{m n \pi}{3} \frac{r_1^3 - r_0^3}{r_1 - r_0}.$$

Die Spule werde vom Strom  $i$  durchlaufen; in der Spulenaxe befinde sich ein Magnetpol Eins im Abstände  $a$  von dem Mittelpunkt der Spule.

Eine einzelne Windungslage vom Halbmesser  $r$  übt bekanntlich die Kraft aus:

$$k = \pi \frac{n i}{s} \left[ \frac{a + s}{\sqrt{(a + s)^2 + r^2}} - \frac{a - s}{\sqrt{(a - s)^2 + r^2}} \right].$$

Die von der ganzen Spule ausgeübte Kraft  $K$  lässt sich allerdings geschlossen integrieren, denn man erhält:

$$K = \int_{r_0}^{r_1} k \frac{m}{r_1 - r_0} dr$$

$$= \frac{3 F i}{r_1^3 - r_0^3} \frac{1}{s} \left[ (a + s) \log \frac{\sqrt{(a + s)^2 + r_1^2} + r_1}{\sqrt{(a + s)^2 + r_0^2} + r_0} - (a - s) \log \frac{\sqrt{(a - s)^2 + r_1^2} + r_1}{\sqrt{(a - s)^2 + r_0^2} + r_0} \right].$$

Aber die Zahlenrechnung nach dieser Formel ist höchst unbequem, besonders da man für ein genaues Resultat mit sehr vielen Stellen rechnen muss, weil bei den Subtractionen das meiste sich weghebt.

Bequemer entwickeln wir deswegen in eine Reihe nach fallenden Potenzen von dem Abstände  $a$ , den wir ja als gross voraussetzen.

1) Es wird nicht etwa eine genaue Kenntniss von  $s$ ,  $r_0$  und  $r_1$  verlangt, was dem Verfahren ja seinen Werth rauben würde; sondern das Resultat wird diese Grössen nur als Correctionsglieder enthalten.

Es ist zunächst:

$$k = \pi \frac{ni}{s} \left[ \left( 1 + \frac{r^2}{(a+s)^2} \right)^{-1/2} - \left( 1 + \frac{r^2}{(a-s)^2} \right)^{-1/2} \right] \\ = \pi \frac{ni}{s} \left[ \frac{1}{2} r^2 [(a-s)^{-2} - (a+s)^{-2}] - \frac{3}{8} r^4 [(a-s)^{-4} - (a+s)^{-4}] \right. \\ \left. + \frac{5}{16} r^6 [(a-s)^{-6} - (a+s)^{-6}] \dots \right].$$

Nun ist:

$$(a-s)^{-p} - (a+s)^{-p} = \frac{2}{a^p} \left[ p \frac{s}{a} + \frac{p(p+1)(p+2)}{3!} \frac{s^3}{a^3} \right. \\ \left. + \frac{p \dots (p+4)}{5!} \frac{s^5}{a^5} \dots \right],$$

also unter Vernachlässigung höherer als vierter Potenzen:

$$k = 2\pi \frac{ni}{a^3} \left[ r^2 \left( 1 + 2 \frac{s^2}{a^2} + 3 \frac{s^4}{a^4} \right) - \frac{r^4}{a^2} \left( \frac{3}{2} + \frac{15}{2} \frac{s^2}{a^2} \right) + \frac{r^6}{a^4} \frac{15}{8} \right].$$

Die von den  $m$  Windungslagen zwischen den Halbmessern  $r_0$  und  $r_1$  ausgeübte Kraft  $K$  ist also:

$$K = \int_{r_0}^{r_1} k \frac{m}{r_1 - r_0} dr \\ = \frac{2\pi}{r_1 - r_0} \frac{mni}{a^3} \left[ \frac{r_1^3 - r_0^3}{3} \left( 1 + 2 \frac{s^2}{a^2} + 3 \frac{s^4}{a^4} \right) - \frac{r_1^5 - r_0^5}{5a^2} \left( \frac{3}{2} + \frac{15}{2} \frac{s^2}{a^2} \right) + \frac{r_1^7 - r_0^7}{7a^4} \frac{15}{8} \right].$$

Ordnet man den Ausdruck nach Potenzen von  $a$ , setzt ferner  $\pi mn/(r_1 - r_0) = 3F/(r_1^3 - r_0^3)$  und führt anstatt der halben Spulenlänge  $s$  die ganze Länge  $l$  ein, so wird:<sup>1)</sup>

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} K &= 2 \frac{Fi}{a^3} \left[ 1 + \frac{1}{a^2} \left( \frac{1}{2} l^2 - \frac{9}{16} \frac{r_1^5 - r_0^5}{r_1^3 - r_0^3} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{a^4} \left( \frac{3}{16} l^4 - \frac{9}{8} l^2 \frac{r_1^5 - r_0^5}{r_1^3 - r_0^3} + \frac{45}{32} \frac{r_1^7 - r_0^7}{r_1^3 - r_0^3} \right) \right]. \end{aligned} \right.$$

Befindet sich an dem Orte, wo wir den Pol Eins annahmen, eine kleine Magnetnadel vom Magnetismus  $M$  und der Länge  $\lambda$ , welche den Winkel  $\varphi$  mit der Windungsebene der Spule bildet, so bekommt man das auf die Nadel ausgeübte Drehungsmoment als:

1) Das nächste vernachlässigte Glied würde lauten:

$$\frac{1}{a^6} \left( \frac{1}{16} l^6 - \frac{9}{8} l^4 \frac{r_1^5 - r_0^5}{r_1^3 - r_0^3} + \frac{15}{8} l^2 \frac{r_1^7 - r_0^7}{r_1^3 - r_0^3} - \frac{35}{32} \frac{r_1^9 - r_0^9}{r_1^3 - r_0^3} \right).$$

$$KM \left( 1 - \frac{1}{3} \frac{\lambda^2}{a^2} \right) \cos \varphi.$$

Bei einem kreisförmigen Magnetspiegel ist für  $\lambda$  der Durchmesser  $d$  zu setzen.

3. Fernwirkung einer Spule auf einen seitlich gelegenen Punkt (zweite Hauptlage).

Die Spule sei wie oben durch ihre Länge  $2s$ , durch die Halbmesser  $r_0$  und  $r_1$  und die Anzahl  $m$  der Lagen von je  $n$  Windungen defnirt. Ein Magnetpol Eins liege ausserhalb der Spule im Abstände  $a$  von deren Mittelpunkt, und zwar in der durch diesen Mittelpunkt gehenden Windungsebene.

Der Pol wird eine Kraft parallel der Spulenaxe erfahren. Um die Grösse dieser Kraft zu berechnen, wenden wir die Ersetzung der Stromspule durch magnetische Belegungen ihrer Endflächen an. Die von dem Magnetpol Eins auf jede Endfläche gefällte Senkrechte hat die Länge  $s$ . Die Kraft, welche der Pol von einer solchen mit Magnetismus belegten Kreisscheibe erfährt, lässt sich folgendermassen berechnen. Es möge  $\mu$  die Flächendichtigkeit des Magnetismus bedeuten.

Wir legen vom Mittelpunkt der Kreisscheibe ein rechtwinkliges Coordinatensystem  $x, y, z$ .  $x$ -Axe sei die Senkrechte auf dem Mittelpunkt der Scheibe (die Axe der Spule). Die  $xy$ -Ebene enthalte den Magnetpol Eins, dessen Coordinaten offenbar  $s, a$  und Null sind.

Ein Flächenelement  $dy dz$  der Scheibe mit den Coordinaten Null,  $y$  und  $z$ , hat von dem Pole einen Abstand  $\sqrt{s^2 + (a - y)^2 + z^2}$ . Das Potential des Flächenelementes auf den Pol ist also:

$$dV = \frac{\mu dy dz}{\sqrt{s^2 + (a - y)^2 + z^2}},$$

und das ganze Potential der Kreisscheibe auf den Pol:

$$V = \mu \int_{-r}^r dy \int_{-\sqrt{r^2 - y^2}}^{\sqrt{r^2 - y^2}} \frac{dz}{\sqrt{s^2 + (a - y)^2 + z^2}} = \mu \int_{-r}^r dy \log \frac{\sqrt{a^2 - 2ay + r^2 + s^2} + \sqrt{r^2 - y^2}}{\sqrt{a^2 - 2ay + r^2 + s^2} - \sqrt{r^2 - y^2}}.$$

Setzt man:

$$\frac{r^2 - y^2}{a^2 - 2ay + r^2 + s^2} = U,$$

so wird:

$$V = \mu \int_{-r}^r dy \log \frac{1+U^{1/2}}{1-U^{1/2}} = 2\mu \int_{-r}^r dy (U^{1/2} + \frac{1}{3}U^{3/2} + \frac{1}{5}U^{5/2} + \dots).$$

Wir werden nur die Kraftcomponente  $X$  parallel der  $x$ -Axe gebrauchen, welche ist:

$$\begin{aligned} X &= -\frac{\partial V}{\partial s} = -\mu \int_{-r}^r dy (U^{-1/2} + U^{1/2} + U^{3/2} + \dots) \frac{\partial U}{\partial s} \\ &= 2\mu s \int_{-r}^r \frac{dy}{r^2 - y^2} (U^{1/2} + U^{3/2} + U^{5/2} + \dots). \end{aligned}$$

Wir schreiben nun  $U = (r^2 - y^2)/a^2 \cdot [1 - 2y/a + (r^2 + s^2)/a^2]^{-1}$  und entwickeln den zweiten Factor in eine Reihe, wobei höhere als die vierten Potenzen vernachlässigt werden sollen. Berücksichtigt man noch, dass für alle ganzen Werthe von  $q$ :

$$\int_{-r}^r dy (r^2 - y^2)^p y^{2q+1} = 0$$

ist, so liefert die Reihenentwicklung:

$$\begin{aligned} X &= \frac{2\mu s}{a^5} \int_{-r}^r dy (r^2 - y^2)^{1/2} \left[ 1 - \frac{2}{a} \frac{r^2 + s^2}{a^2} + \frac{15}{8} \frac{(r^2 + s^2)^2}{a^4} \right. \\ &\quad \left. + \frac{y^2}{a^2} \left( \frac{15}{2} - \frac{195}{8} \frac{r^2 + s^2}{a^2} \right) + \frac{y^4}{a^4} \frac{315}{8} \right] \\ &+ \frac{2\mu s}{a^5} \int_{-r}^r dy (r^2 - y^2)^{3/2} \left[ 1 - \frac{3}{2} \frac{r^2 + s^2}{a^2} + \frac{35}{8} \frac{y^2}{a^2} \right] + \frac{2\mu s}{a^7} \int_{-r}^r dy (r^2 - y^2)^{5/2}. \end{aligned}$$

Nun ist zwischen den Grenzen  $-r$  und  $+r$ :

$$\int dy (r^2 - y^2)^{1/2} = \frac{1}{2} r^2 \pi; \quad \int dy (r^2 - y^2)^{1/2} y^2 = \frac{1}{8} r^4 \pi; \quad \int dy (r^2 - y^2)^{1/2} y^4 = \frac{1}{16} r^6 \pi;$$

$$\int dy (r^2 - y^2)^{3/2} = \frac{3}{8} r^4 \pi; \quad \int dy (r^2 - y^2)^{3/2} y^2 = \frac{1}{16} r^6 \pi; \quad \int dy (r^2 - y^2)^{5/2} = \frac{5}{16} r^6 \pi.$$

Dies eingesetzt erhält man leicht:

$$X = \frac{\mu s r^2 \pi}{a^3} \left[ 1 + \frac{9}{8} \frac{r^2}{a^2} - \frac{3}{2} \frac{s^2}{a^2} + \frac{75}{64} \frac{r^4}{a^4} - \frac{75}{16} \frac{r^2 s^2}{a^2} + \frac{15}{8} \frac{s^4}{a^4} \right].$$

$2X$  gibt also die von den beiden Belegungen einer Stromspule auf den Magnetpol Eins ausgeübte Kraft, vorausgesetzt, dass die Belegungen aus Magnetismus von der Dichtigkeit  $\mu$

bestehen. Ist nun  $i$  die Stromstärke, so besteht die den Strom ersetzende Polbelegung bekanntlich aus Magnetismus von der Dichtigkeit  $in/2s$ , sodass die Kraft  $k$  einer Windungslage auf den Magnetpol Eins als:

$$k = \frac{ni r^2 \pi}{a^3} \left[ 1 + \frac{9}{8} \frac{r^2}{a^2} - \frac{3}{2} \frac{s^2}{a^2} + \frac{75}{64} \frac{r^4}{a^4} - \frac{75}{16} \frac{r^2 s^2}{a^2 a^2} + \frac{15}{8} \frac{s^4}{a^4} \right]$$

erhalten wird.

Die Gesamtkraft der Spule von  $m$  Lagen zwischen den Halbmessern  $r_0$  und  $r_1$  ist folglich:

$$K = \int_{r_0}^{r_1} k \frac{m dr}{r_1 - r_0} = \frac{mni\pi}{a^3(r_1 - r_0)} \int_{r_0}^{r_1} r^2 dr \left[ 1 + \frac{9}{8} \frac{r^2}{a^2} - \frac{3}{2} \frac{s^2}{a^2} + \dots \right].$$

Führt man die Integration aus und ersetzt:

$$\frac{mni\pi}{r_1 - r_0} \quad \text{durch:} \quad \frac{3F}{r_1^3 - r_0^3},$$

wo  $F$  die Gesamtfläche, so entsteht:

$$K = i \frac{F}{a^3} \left[ 1 - \frac{3}{2} \frac{s^2}{a^2} + \frac{15}{8} \frac{s^4}{a^4} + \frac{3}{2} \frac{1}{a^2} \frac{r_1^5 - r_0^5}{r_1^3 - r_0^3} \left( \frac{9}{8} - \frac{75}{16} \frac{s^2}{a^2} \right) + \frac{1}{a^4} \frac{r_1^7 - r_0^7}{r_1^3 - r_0^3} \cdot \frac{75}{64} \right].$$

Die Reihe nach Potenzen von  $a$  geordnet, und anstatt  $s$  die Spulenlänge  $l = 2s$  eingeführt, wird endlich<sup>1)</sup>:

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} K &= i \frac{F}{a^3} \left[ 1 + \frac{1}{a^2} \left( -\frac{3}{8} l^2 + \frac{37}{16} \frac{r_1^5 - r_0^5}{r_1^3 - r_0^3} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{a^4} \left( \frac{15}{128} l^4 - \frac{45}{64} l^2 \frac{r_1^5 - r_0^5}{r_1^3 - r_0^3} + \frac{225}{448} \frac{r_1^7 - r_0^7}{r_1^3 - r_0^3} \right) \right] \end{aligned} \right.$$

Substituieren wir für den Magnetpol Eins eine Magnetnadel vom Magnetismus  $M$  und der kleinen Länge  $\lambda$ , und bildet diese Nadel mit der Windungsebene der Spule den Winkel  $\varphi$ , so erhalten wir das auf die Nadel ausgeübte Drehungsmoment als  $KM(1 + (\lambda^2/a^2)) \cos \varphi$ . Bei kreisförmigen Magnetspiegeln als Nadeln ist für  $\lambda^2$  zu setzen  $\frac{2}{3} d^2$ .

1) Das vernachlässigte Glied sechster Ordnung lautet:

$$+ \frac{1}{a^6} \left( -\frac{35}{1024} l^6 + \frac{441}{1024} l^4 \frac{r_1^5 - r_0^5}{r_1^3 - r_0^3} - \frac{325}{312} l^2 \frac{r_1^7 - r_0^7}{r_1^3 - r_0^3} + \frac{1325}{3072} \frac{r_1^9 - r_0^9}{r_1^3 - r_0^3} \right).$$

2) Die Begründung folgt in einem späteren Aufsatz.



## 4. Einfluss der Dicke und der Bespinnung des Drahtes.

Im Vorigen wurde vorausgesetzt, dass der Strom den Querschnitt der Spule gleichförmig ausfülle. Streng genommen ist dies aus zwei Gründen nicht der Fall.

1) In einer dicken Drahtwindung vertheilt ein Strom sich nicht gleichförmig, weil die Widerstände der einzelnen Fasern ungleich sind. Ist der Halbmesser der Windung  $r$ , des Drahtes selbst  $\varrho$ , so ist für die Fernwirkung  $r - \frac{1}{2}\varrho^2/r$ , für die Wirkung auf den Mittelpunkt  $r - \frac{1}{2}\varrho^2/r$  anstatt  $r$  in Rechnung zu setzen. Diese Correctionen können bei geometrischen Ausmessungen für dicke Drähte zuweilen in Betracht kommen; in dem Correctionsgliede der galvanischen Ausmessung dürfte kaum jemals ein merklicher Einfluss entstehen.

2) Wäre die Spule streng aus übereinander liegenden Kreisen gebildet, so würde anstatt der Drahtströme eine continuirliche gleichmässige Stromerfüllung der Spule substituirt werden dürfen; wenn nur der Draht einschliesslich Bespinnung hinreichend dünn gegen den Abstand der Magnetnadel ist, um für den Strom in dem Drahte einen Strom setzen zu können, welcher das den Drahtquerschnitt umhüllende Quadrat ausfüllt. Letzteres wird immer erlaubt sein. Dann also sind  $r_1$  und  $r_0$  die Halbmesser der Cylinderflächen, welche die Drahtbespinnung der Spule von aussen und innen berühren.

In der angegebenen Weise aber sind die Spulen nicht gewunden, sondern die oberen Windungen sinken in die Vertiefungen der unteren Lagen ein. Um wenigstens den hieraus entstehenden möglichen Fehler kennen zu lernen, möge einmal ein vollständiges Einsinken angenommen werden, sodass jeder Draht von sechs anderen Drähten berührt werde. In diesem Falle zerlegen wir den Querschnitt der Spule nach Art von Bienenzellen in Sechsecke, welche die Drahtbespinnung einhüllen. Dann kann die Spule schliesslich angesehen werden als ein continuirlich mit Strom erfüllter Hohlcyliner, aber noch mit aussen und innen aufgelegten Ringen, welche je den Querschnitt eines gleichschenkligen

Dreiecks von der Drahtdicke  $2\rho$  als Grundlinie und von der Höhe  $\rho/\sqrt{3}$  haben.

An Stelle dieser Ringe kann man eine Schicht von rechteckigem Querschnitt setzen, welche die Spulenlänge als Breite und  $\frac{3}{4} \cdot \rho/\sqrt{3} = 0,385 \cdot \rho$  als Dicke hat. Die Stromdichtigkeit ist natürlich in diesem Rechteck im gleichen Verhältniss kleiner zu nehmen, wie die Dreiecksflächen zusammen kleiner als das Rechteck sind, d. i. im Verhältniss 3:4.

Es seien nun  $R_1$  und  $R_0$  der äussere und innere Halbmesser der Spule, gemessen über, resp. unter den Drähten einschliesslich der Bespinnungen. Dann ist leicht nachzurechnen, dass die beiden Halbmesser der besprochenen äusseren rechteckigen Schicht gleich  $R_1 - 0,038 \rho$ , resp.  $R_1 - 0,423 \rho$  sind. Um ebensoviel sind die Halbmesser der inneren Schicht grösser als  $R_0$ .

Somit ersetzen wir die wirklich vorhandene Stromspule durch zwei gleichmässig mit Strom erfüllte Hohlcyylinder von

1) den Halbmessern  $R_0 + 0,038 \rho$  und  $R_1 - 0,038 \rho$ ; Stromdichtigkeit =  $\frac{3}{4}$ ,

2) den Halbmessern  $R_0 + 0,423 \rho$  und  $R_1 - 0,423 \rho$ ; Stromdichtigkeit =  $\frac{1}{4}$ .

Der Ausdruck (5) p. 518 oder (6) p. 521 ist also für diese beiden Theile zu bilden und zu summiren. Indessen sieht man, dass bei unserem Verfahren nur die Correctionsglieder beeinflusst sein können, und von diesen in merklicher Weise nur das erste mit  $a^{-2}$ .

Nun ist hinreichend genau:

$$\begin{aligned} & \frac{3}{4} \frac{(R_1 - 0,038 \rho)^5 - (R_0 + 0,038 \rho)^5}{(R_1 - 0,038 \rho)^3 - (R_0 + 0,038 \rho)^3} + \frac{1}{4} \frac{(R_1 - 0,423 \rho)^5 - (R_0 + 0,423 \rho)^5}{(R_1 - 0,423 \rho)^3 - (R_0 + 0,423 \rho)^3} \\ &= \frac{R_1^5 - R_0^5}{R_1^3 - R_0^3} \left[ 1 + \rho \left( 0,40 \frac{R_1^2 + R_0^2}{R_1^3 - R_0^3} - 0,67 \frac{R_1^4 + R_0^4}{R_1^5 - R_0^5} \right) \right]. \end{aligned}$$

Dieser Werth also wäre im Falle völligen Einsinkens der Windungen in die Vertiefungen der unteren Schichten für  $(r_1^5 - r_0^5)/(r_1^3 - r_0^3)$  einzusetzen. Nur bei sehr dicken Drähten und verhältnissmässig kleiner Windungsweite kommt die Correction in Betracht, wobei dann freilich eine besondere Untersuchung über den Grad des Einsinkens nothwendig ist.

## 5. Vervollständigung der Rechnung.

Gl. (4) p. 516 wurde die Windungsfläche  $F$  für eine Beobachtung aus der ersten Hauptlage gefunden:

$$F = \frac{a^2 \pi}{R} \frac{\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \varphi'}{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi'},$$

(resp. für die zweite Hauptlage mit dem Factor 2), wo  $R$  der Halbmesser der Tangentenbussole,  $a$  der Nadelabstand von der Mitte der Spule,  $\varphi$  der Nadelausschlag durch den Strom, wenn beide Einwirkungen in gleichem Sinne stattfanden,  $\varphi'$  der Ausschlag war, wenn der Strom nur in der Tangentenbussole commutirt wurde.

Hierzu treten aber noch eine Correction  $\delta$ , herrührend von der Länge und Breite der Spule, eine Correction  $\varepsilon$  von der Breite und Dicke des Ringes und eventuell von der Zuleitung des Stromes der Tangentenbussole und eine solche  $\zeta$  von der Nadellänge. Wir schreiben (2. H.-L. noch Factor 2):

$$(7) \quad F = \frac{a^2 \pi}{R} \frac{\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \varphi'}{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi'} \frac{1 + \varepsilon + \zeta}{1 + \delta},$$

so ist, wenn  $l$  die Länge der Spule,  $r_0$  und  $r_1$  ihr innerer und äusserer Halbmesser, wenn wir endlich setzen (p. 518. 521):

$$\frac{r_1^5 - r_0^5}{r_1^3 - r_0^3} = P, \quad \frac{r_1^7 - r_0^7}{r_1^5 - r_0^5} = P',$$

$$(8) \quad \begin{cases} \text{in 1. H.-L. } \delta = \frac{1}{a^2} \left( \frac{1}{3} l^2 - \frac{9}{16} P \right) + \frac{1}{a^4} \left( \frac{3}{16} l^4 - \frac{9}{8} l^2 P + \frac{45}{32} P' \right), \\ \text{in 2. H.-L. } \delta = \frac{1}{a^2} \left( -\frac{3}{8} l^2 + \frac{27}{16} P \right) + \frac{1}{a^4} \left( \frac{15}{128} l^4 - \frac{45}{64} l^2 P + \frac{225}{448} P' \right). \end{cases}$$

Ist  $b$  die Breite,  $h$  die Dicke des Ringes der Tangentenbussole, so wird, wenn  $\eta$  die Correction wegen der Zuleitung bedeutet (vgl. auch nächsten Paragraph):

$$(9) \quad \varepsilon = \frac{1}{6} \frac{h^2}{R^2} - \frac{1}{8} \frac{b^2}{R^2} + \eta,$$

falls eine Windung vorhanden ist. Für Windungslagen aus dünnerem Draht würde  $\frac{1}{12}$  anstatt  $\frac{1}{6}$  zu setzen sein, doch wird dieser Fall kaum vorkommen.

Endlich sei  $\lambda$  die Nadellänge, resp.  $d$  der Durchmesser eines Magetspiegels, so wird (p. 519. 521):

$$(10) \begin{cases} \text{in 1.H.-L. } \zeta = \frac{\lambda^2}{a^2} + 0,13 \frac{\lambda^2}{R^2}, & \text{resp. } \zeta = \frac{1}{3} \frac{d^2}{a^2} + 0,12 \frac{d^2}{R^2}, \\ \text{in 2.H.-L. } \zeta = -\frac{\lambda^2}{a^2} + 0,13 \frac{\lambda^2}{R^2}, & \text{resp. } \zeta = -\frac{2}{3} \frac{d^2}{a^2} + 0,12 \frac{d^2}{R^2}. \end{cases}$$

## 6. Einige praktische Regeln.

1. Bestimmung des Abstandes  $a$ . Die Mitte der Spule wird sich nicht so genau angeben lassen, dass man wirklich von da aus den Abstand  $a$  der Nadel auf Bruchtheile des Millimeters messen könnte. Man hilft sich in der Weise, dass man das Magnetometer folgeweise auf entgegengesetzten Seiten der Spule aufstellt. Gemessen wird der gegenseitige Abstand  $2a$  der beiden Orte des Magnetometercocons. Auch die unsymmetrische Magnetisirung der Nadel fällt hierbei heraus.

Die Messung kann bei Aufstellung der Spule in der zweiten Hauptlage mit einem Comparator ausgeführt werden. Auf Zehntelmillimeter genau aber beobachtet man auch mit einem Millimetermaassstabe. Nur ist in letzterem Falle eine kleine Hülfeinrichtung nothwendig, weil man den Maassstab wegen der Spule und der Tangentenbussole selbst nicht wohl in gleicher Höhe wie den Cocon aufstellen kann, sondern oberhalb der Tangentenbussole bleiben muss. Man hängt dann von dem Maassstabe herunter ein zweites Coconsenkel, welches erstens auf die Theilung projicirt wird, und welches man ferner gerade hinter den Cocon des Magnetometers orientirt. Zur bequemen Orientirung war das Hülfsenkel über die Rinne eines mit Schraubengewinde versehenen Stiftes geführt, sodass die Rinne mit dem Senkel sich mikrometrisch horizontal verschieben liess.

Die Projection der beiden Fäden aufeinander und des Hülfsfadens auf den Maassstab wurde nach Dr. Hallock's Vorschlag mit dem Ablesefernrohr selbst ausgeführt, welches ja durch die Einstellung auf den Magnetspiegel von selbst zum Meridian, also auch zum Maassstab senkrecht steht.

In der ersten Hauptlage wendet man das folgende einfache Hülfsmittel an. Der Nadelcocon selbst ist hier freilich überhaupt nicht zu verwenden, da der Ring der Tan-

gentenbussole das Visiren hindert. Aber man kann ja nach Osten oder Westen in einem constanten Abstand von dem Nadelcocon ein zweites Senkel am Magnetometer anbringen. Wir hatten an den Kopf der Aufwindschraube der Nadel einen kleinen Fortsatz angelöthet, welcher diesen Cocon trug. Auch ein kleiner an die Glasröhre zu befestigender Arm kann diesen Dienst leisten.

Die Grösse  $2a$  der Verschiebung des Magnetometers wird nun als Verschiebung dieses Senkels beobachtet, indem man z. B. wieder mittelst eines Hülfsenkels, wie oben, auf den Maassstab projecirt. Das Hülfsenkel kann hier ganz dicht hinter dem anderen liegen, sodass man mit blossen Auge und Spiegel oder auch mit einem genähert im Meridian blickenden Fernrohr projeciren kann.

2. Magnetnadel. Hierfür empfiehlt sich in der zweiten Hauptlage z. B. ein Spiegelmagnet; für alle Zwecke ist eine Nadel mit drehbarem Spiegel zu brauchen.<sup>1)</sup> Bei einer Beobachtung aus erste Hauptlage wird es meistens am bequemsten sein, den Spiegel gegen die Nadel schräg zu stellen, sodass man immer von derselben Seite der Aufstellungslinie aus ablesen kann. Sonst muss für die erste Hauptlage ein Magnet-Doppelspiegel gegeben sein, den man einmal aus Osten, das andere mal aus Westen beobachtet. Eine Umhängung zwischen beiden Beobachtungen ist natürlich nicht gestattet.

3. Stromwendung. Aus bekannten Gründen wird man alle Ausschläge nach beiden Seiten beobachten, also nicht blos die Tangentenbussole allein, sondern ausserdem den ganzen Strom commutiren. Man erhält also vier Nadeleinstellungen,

welche heissen mögen:

	$n_1$	$n_2$	$n_1'$	$n_2'$
für die Stellung des Hauptcommutators	. . .	I	II	I II
f. d. Stellung des Commutat. der Tangentenbussole	1	1	2	2

Es sei ferner  $n_1 - n_2 = x$  und  $n_1' - n_2' = x'$ . Dann ist, wenn  $A$  den Scalenabstand bedeutet:

1) Vgl. Kohlrausch, Wied. Ann. 15. p. 546 und 550. 1882. Ein kleiner Localeinfluss des Dämpfers ist hier natürlich ganz unschädlich, da man nur Verhältnisse ermittelt.

$$\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2A}, \quad \varphi' = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x'}{2A}.$$

4. Vereinfachte Rechnung. Durch Reihenentwicklung, wenn man  $\frac{1}{128} x^4 / A^4$  gegen Eins vernachlässigen kann, wird:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{x}{4A} \left( 1 - \frac{1}{16} \frac{x^2}{A^2} \right), \quad \operatorname{tg} \varphi' = \frac{x'}{4A} \left( 1 - \frac{1}{16} \frac{x'^2}{A^2} \right).$$

Durch Einsetzung dieser Werthe findet man leicht den äusserst bequemen Ausdruck:

$$(11) \quad \frac{\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \varphi'}{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi'} = \frac{x + x'}{x - x'} \left( 1 + \frac{1}{8} \frac{xx'}{A^2} \right)^{.1}$$

5. Schwankungen der Stromstärke. Richtet man den Abstand  $a$  so ein, dass die Stromwirkungen von der Tangentenbussole und von der Spule nahe gleich sind, so werden Schwankungen in der Stromstärke überhaupt gleichgültig. Will oder muss man aus anderem Abstände beobachten, so eliminirt man die Inconstanz durch abwechselnde Ablesung in gleichen Zeiträumen. Zweckmässig ist die Reihenfolge der Commutatorstellungen  $I_1, I_2, II_2, II_1, I_1, I_2$  u. s. w. oder mit Rücksicht darauf, dass die Stellung 2 von besonderem Einfluss auf das Resultat ist, die Reihenfolge  $I_1, I_2, II_2, II_1, I_2, I_1$  u. s. w. (vgl. v. S.), wobei man die Differenzen  $n_1 - n_2$  und  $n'_1 - n'_2$  immer auf den mittleren gleichen Augenblick bezieht.

6. Unsymmetrie der Aufstellung. Sind die auf beiden Seiten gefundenen Werthe von  $(\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \varphi') / (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi')$  um Procente verschieden, so muss an dem Mittel eine Correction angebracht werden. Schreiben wir:

$$\frac{\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \varphi'}{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi'} = p,$$

und werde auf der einen Seite der Werth  $p_1$ , auf der anderen Seite  $p_2$  beobachtet, so kann man setzen, wenn dem Abstände  $a$  der gesuchte Werth  $p_0$  entsprechen würde:

$$p_0 a^3 = p_1 (a + \alpha)^3 = p_2 (a - \alpha)^3.$$

Die Elimination von  $\alpha$  aus dieser Doppelgleichung ergibt unter Weglassung höherer Potenzen:

1) Bei welchem das Vorzeichen von  $xx'$  zu beachten ist!

$$(12) \quad p_0 = \frac{p_1 + p_2}{2} \left[ 1 - \frac{2}{3} \left( \frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2} \right)^2 \right].$$

7. Elimination des ersten Correctionsgliedes durch combinirte Beobachtung aus erster und zweiter Hauptlage.

Es gibt Fälle, in denen man die Dimensionen einer Spule, welche in den Correctionsgliedern auftreten, nicht hinreichend genau kennt; sei es, dass etwa der innere Halbmesser nicht genau gemessen wäre, oder dass die äussere Oberfläche nicht gut cylindrisch ausgefallen ist, oder auch dass man nicht eine constante Dichte der Windungen verbürgen kann. Vgl. auch den Schluss der Abhandlung.

Nun wird das erste Correctionsglied mit  $1/a^2$  sich im allgemeinen auf ein oder mehrere Hundertel belaufen; die Unsicherheit könnte also etwa noch Tausendtel betragen. Das Ziel aber, welches doch auch vorliegen kann, dass der zulässige Fehler des Correctionsgliedes auf etwa  $1/10000$  beschränkt sei, wird man überhaupt ohne grössere Umständlichkeiten kaum erreichen können.

Es ist daher von grossem Vortheil, dass die Form des ersten Correctionsgliedes ein Mittel gibt, dasselbe vollständig zu eliminiren. Und da das zweite Glied mit  $1/a^4$  nach Zehntausendteln rechnet und daher stets mit hinreichender Genauigkeit zu ermitteln ist, so werden dadurch alle Schwierigkeiten beseitigt.

Der Factor, welcher mit  $1/a^2$  multiplicirt das erste Correctionsglied liefert (Gl. 8, p. 524) ist:

in erster H.-L.  $\frac{1}{2}l^2 - \frac{2}{15}P$ , in zweiter H.-L.  $-\frac{1}{3}l^2 + \frac{2}{15}P$ .  
Man sieht, dass der zweite Ausdruck gerade  $\frac{3}{4}$  des ersten beträgt, aber das entgegengesetzte Vorzeichen hat.

Stellt man also zwei Beobachtungen an, nämlich eine aus der ersten Hauptlage mit dem Abstände  $a_1$  und eine aus der zweiten Hauptlage mit dem Abstände  $a_2$ , wobei  $a_1:a_2 = \sqrt{4:3} = 1,155$  ist, so erhält man in beiden Fällen den entgegengesetzt gleichen Betrag der Correction und kann die letztere eliminiren.

Es wird hierbei im allgemeinen genügen, beide Be-



stimmungen von  $F$  für sich auszurechnen und das Mittel zu nehmen. Die Gleichheit oder Ungleichheit beider Resultate liefert zugleich eine in manchen Fällen willkommene Probe auf die Homogenität der Spule.

Die genaue Elimination würde auf folgendem Wege geschehen. Wir wollen das Tangentenverhältniss (p. 524) durch  $T$  bezeichnen. Dann ist für die erste Hauptlage:

$$F \left[ 1 + \frac{1}{a_1^2} \left( \frac{1}{2} l^2 - \frac{9}{10} P \right) + \frac{1}{a_1^4} \left( \frac{3}{16} l^4 - \frac{3}{2} l^2 P + \frac{15}{32} P^2 \right) \right] = a_1^3 T_1 \frac{\pi}{R} (1 + \varepsilon + \zeta_1),$$

für die zweite Hauptlage, wenn  $a_1^2 : a_2^2$  sehr nahe  $= 4 : 3$  ist:

$$F \left[ 1 + \frac{1}{a_1^2} \left( -\frac{1}{2} l^2 + \frac{9}{10} P \right) + \frac{1}{a_1^4} \left( \frac{5}{24} l^4 - \frac{5}{4} l^2 P + \frac{35}{96} P^2 \right) \right] = 2 a_2^3 T_2 \frac{\pi}{R} (1 + \varepsilon + \zeta_2).$$

Die Summirung ergibt, bei der Kleinheit von  $\zeta_1$  und  $\zeta_2$ , die rechnerisch sehr bequeme Formel:

$$(13) \quad F \left[ 1 + \frac{19}{(2a_1)^4} \left( \frac{1}{2} l^4 - l^2 P + \frac{5}{2} P^2 \right) \right] = \frac{\pi}{R} \left( 1 + \varepsilon + \frac{\zeta_1 + \zeta_2}{2} \right) \left( \frac{1}{2} a_1^3 T_1 + a_2^3 T_2 \right).$$

#### 8. Beobachtungen.

Durch die Zuverlässigkeit der Herren W. Weber und Riecke wurde mir auf meine Bitte der erste von Weber im Jahre 1852 hergestellte Erdinductor<sup>1)</sup> als erstes Messungsobject zur Verfügung gestellt.

Mittelst einer langen Magnetnadel wurde die Spule, deren Holzrahmen sich vorzüglich eben und parallel erhalten hatte, in den Meridian orientirt. Ein langer hölzerner Maassstab, den man nach dem Gebrauch mit einem Normalmeter verglich, diente zur Orientirung der Tangentenbussole und zur Abmessung der Coconabstände (vgl. p. 525). Auf Verticalstellung des Rahmens wurde die ausreichende Sorgfalt verwendet. Die Stromwender befanden sich neben der Spule in der Höhe der Nadel und konnten, da sie wesentlich aus horizontalen Leitern bestanden, keinen Einfluss ausüben.

Die äusseren und inneren Halbmesser der Spule waren  $r_1 = 17,14$  cm,  $r_0 = 11,43$  cm. Die Länge derselben  $l = 12,0$  cm. Hieraus findet sich (p. 524, Formel 8) für die Correction  $\delta$ :

1) Weber, Abh. d. Gött. Ges. d. Wiss. 5. p. 53 d. Sep.-Abdr. 1853.  
Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XVIII.

$$\frac{1}{2} l^2 - \frac{9}{10} P = 254,3 \text{ cm}^2, \quad \frac{3}{16} l^4 - \frac{3}{8} l^2 P + \frac{45}{16} P' = 38000 \text{ cm}^4, \\ -\frac{3}{8} l^2 + \frac{27}{40} P = 190,7 \text{ cm}^2, \quad \frac{45}{128} l^4 - \frac{45}{64} l^2 P + \frac{225}{128} P' = 23700 \text{ cm}^4.$$

Die Tangentenbussole bestand aus einem Kupferringe von rechtwinkligem Querschnitt mit der Breite  $b = 0,86 \text{ cm}$  und der Dicke  $h = 0,41 \text{ cm}$ . Der mittlere Halbmesser wurde von W. Kohlrausch nach einem Verfahren, über welches bei einer anderen Gelegenheit berichtet werden wird,  $R = 20,146 \text{ cm}$  bestimmt. Die Zuleitung des Stromes bestand aus zwei geradlinigen parallelen Streifen von gleichem Querschnitt wie der Ring, welche  $13 \text{ cm}$  lang und in einem Abstand ihrer Mittellinie  $0,52 \text{ cm}$  sich an die aufgeschnittenen Enden des Kreises rechtwinklig ansetzten. Weiterhin waren die Zuleitungsdrähte umeinander gedreht und also ohne Einfluss.

Die Correction wegen der Zuleitung<sup>1)</sup> berechnet sich hieraus  $= -0,0013$ . Also ist (Gl. 9, p. 524):

$$\varepsilon = \frac{1}{8} \frac{h^2}{R^2} - \frac{1}{8} \frac{b^2}{R^2} = 0,0013 = -0,0015.$$

Die Nadel bestand entweder aus einem gestreckten Magnet von der Länge  $\lambda = 1,5 \text{ cm}$  oder aus einer Kreisscheibe vom Durchmesser  $d = 2,08 \text{ cm}$ . Es beträgt also die Correction wegen der Nadellänge (Gl. 10, p. 525):

$$\begin{array}{l} \text{Gestreckter} \left\{ \begin{array}{l} 1. \text{ H.-L. } \zeta = \frac{1}{3} \frac{\lambda^2}{a^2} + 0,12 \frac{\lambda^2}{R^2} = \frac{0,7}{a^2} + 0,0007 \\ \text{Magnet} \quad \left\{ \begin{array}{l} 2. \text{ H.-L. } \zeta = -\frac{\lambda^2}{a^2} + 0,12 \frac{\lambda^2}{R^2} = -\frac{2,2}{a^2} + 0,0007 \end{array} \right. \end{array} \right. \\ \text{Magnet-} \left\{ \begin{array}{l} 1. \text{ H.-L. } \zeta = \frac{1}{3} \frac{d^2}{a^2} + 0,12 \frac{d^2}{R^2} = \frac{1,4}{a^2} + 0,0013 \\ \text{Spiegel} \quad \left\{ \begin{array}{l} 2. \text{ H.-L. } \zeta = -\frac{2}{3} \frac{d^2}{a^2} + 0,12 \frac{d^2}{R^2} = -\frac{2,9}{a^2} + 0,0013. \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array}$$

Ich will die erste Beobachtungsreihe, welche in der zweiten Hauptlage stattfand, etwas ausführlicher mittheilen. Der Strom wurde von zwei Daniell'schen Elementen geliefert und durch Einschaltung verschiedener Widerstände variirt. Die Inconstanz der Elemente betrug während einer Versuchsreihe wohl einmal  $1\%$ . Das p. 527 erwähnte Verfahren der Abwechselung in gleichen Zwischenzeiten lieferte trotzdem gut übereinstimmende Resultate. Jede Zahl ist das

1) cf. F. Kohlrausch, Wied. Ann. 15. p. 553. 1882.

Mittel aus drei mit dieser Abwechselung gewonnenen Einzelzahlen.

Der Abstand des Nadelcocons in beiden Aufstellungen betrug  $2a = 250,344$  cm, der Scalenabstand war  $A = 3310$  mm. Als Scala diente ein von Wiegand in Würzburg hergestellter, in Millimeter getheilter Glasstab von 1200 mm Länge. Die Theilfehler waren kleiner als  $\frac{1}{20}$  mm. Als Magnetnadel diente der Stahlspiegel. Ueber die Rechnung vergleiche Gl. (11) p. 527.

Tangenten- busssole	Ein- geschaltet	$\alpha$	$\alpha'$	$\frac{\text{tg } \varphi + \text{tg } \varphi'}{\text{tg } \varphi - \text{tg } \varphi'}$
Nord	3 Siemens	<sup>mm</sup> 1090,33	<sup>mm</sup> -242,35	0,63438
	5 „	856,58	-190,80	0,63447
	10 „	552,90	-123,47	0,63441
Süd	4 „	894,17	-191,35	0,64619
	5 „	822,57	-176,23	0,64605
	10 „	541,28	-116,15	0,64619

Der Mittelwerth ist Nord  $p_1 = 0,63442$ , Süd  $p_2 = 0,64614$ . Der Unterschied rührt von unsymmetrischer Aufstellung her. Man erhält den Werth, welcher dem Abstände  $a = 125,172$  cm entspricht, nach p. 528 Gl. (12):

$$\frac{\text{tg } \varphi + \text{tg } \varphi'}{\text{tg } \varphi - \text{tg } \varphi'} = \frac{p_1 + p_2}{2} \left[ 1 - \frac{2}{3} \left( \frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2} \right)^2 \right] = 0,64025.$$

Ferner berechnet sich (v. S.):

$$\delta = \frac{190,7}{125,2^2} + \frac{23700}{125,2^4} = 0,0123,$$

$$\zeta = -\frac{2,9}{125^2} + 0,0013 = +0,0011,$$

während (v. S.)  $\varepsilon = -0,0015$  ist.

Die Stromfläche findet sich heraus (Gl. 7, p. 524):

$$F = 2 \cdot \frac{125,172^2}{20,146} \cdot \pi \cdot 0,64025 \frac{1 - 0,0015 + 0,0010}{1,0123} = 386\,730 \text{ qcm.}$$

Eine zweite Messung aus der 2. Hauptlage mit dem Abstände  $a = 107,801$  cm gab  $(\text{tg } \varphi + \text{tg } \varphi')/(\text{tg } \varphi - \text{tg } \varphi')$  im Süden = 0,99813 und im Norden 1,01629, woraus der Mittelwerth 1,00715. Hieraus berechnet sich:

$$F = 386\,930 \text{ qcm.}$$

Sodann stellte Hr. Hallock zwei Beobachtungen aus der 1. Hauptlage an; die eine mit dem Magnetspiegel (wobei das Ablesefernrohr in der Richtung der Aufstellungslinie im Osten oder Westen von dem Spiegel stand) mit  $a = 134,832$  cm gab das Tangentenverhältniss  $= 0,99707$  im Osten und  $1,00047$  im Westen, im Mittel also  $= 0,99877$  und:

$$F = 387\,120 \text{ qcm.}$$

Die andere wurde mit der gestreckten Nadel gemacht, mit dem Abstände  $a = 134,820$  cm. Dieselbe gab das Tangentenverhältniss in beiden Stellungen  $0,99918$  und  $1,00055$ , im Mittel  $0,99986$  und:

$$F = 387\,200 \text{ qcm.}$$

Das Mittel aus diesen Einzelmessungen ist<sup>1)</sup>:

$$F = 387\,000 \text{ qcm} = 38,700 \text{ qm.}$$

Die einzelnen Abweichungen betragen in Theilen des Ganzen  $-0,0007$   $-0,0002$   $+0,0003$   $+0,0005$  mit einem mittleren Fehler  $\pm 0,0006$  für die Einzelmessung und  $\pm 0,0003$  oder  $\pm 110$  qcm für das Resultat.

Die Abweichungen sind etwas grösser, als man nach den in den Abmessungen möglichen Fehlern erwarten sollte. Zugleich fällt auf, dass die Beobachtungen aus der ersten Hauptlage ein etwas zu grosses, die in der zweiten Hauptlage ein zu kleines Ergebniss geliefert haben. Da nun die aus den Dimensionen der Spule erwachsenen Correctionen in der ersten Hauptlage positiv, in der zweiten negativ sind, so sind die Resultate wahrscheinlich übercorrigirt worden. Dies würde die Vermuthung bekräftigen, dass die inneren Drahtschichten dichter liegen, als die äusseren, wobei der gemessene Halbmesser  $r_1$  offenbar eine zu grosse Correction liefern muss. In der That, wenn man  $r_1$  um  $\frac{1}{60}$  kleiner setzt, so verschwindet die Regelmässigkeit der Fehler, und der mittlere Fehler würde etwa auf die Hälfte gebracht werden. Das Endresultat wird übrigens in unserem Falle von etwas grösser oder kleiner angenommenen Halbmessern der Spule fast unmerklich beeinflusst, da die Correctionen aus

1) Die vorläufige Angabe Gött. Nachr. 1882 p. 660 von  $38,720$  qm ist hiernach zu berichtigen.

der ersten und zweiten Hauptlage sich in dem Mittelwerth nahe compensiren (vgl. p. 528).

Jedenfalls möge die Gelegenheit benutzt werden, um auf die Vortheile hinzuweisen, welche nach § 7 durch combinirte Beobachtungen aus beiden Hauptlagen entstehen.

Würzburg, Januar 1883.

Durch die Güte des Herrn Herausgebers der Annalen wurde ich aufmerksam gemacht, dass schon in früherer Zeit Hr. Bosscha auf das Bedürfniss einer empirischen Bestimmung der electromagnetischen Constanten eines Stromleiters hingewiesen hat.<sup>1)</sup> Hr. Bosscha schlägt eine Differentialmethode vor, bei welcher man die electromagnetische Wirkung eines Leiters mit derjenigen eines anderen dadurch vergleicht, dass man unter Stromverzweigung mittelst Einschaltung verschiedener bekannter Widerstände eine Magnetnadel auf Null bringt.

Wie ich selbst noch nachträglich gesehen habe, findet sich aber auch bei Maxwell<sup>2)</sup> ein Vorschlag „das magnetische Moment des Stromes Eins in einer kleinen Spule dadurch zu ermitteln, dass man im Centrum einer Normalspule (Standard coil) eine Magnetnadel aufhängt und die kleine Spule parallel zu sich längs der gemeinschaftlichen Axe beider Spulen verschiebt, bis derselbe Strom, beide Spulen in entgegengesetzter Richtung durchfliessend, die Nadel nicht mehr ablenkt.“ Das Verfahren ist dem in diesem Aufsatz ausgeführten also im Princip analog. Was die Ausführung betrifft, so dürfte man der unserigen den Vorzug geben, einmal da dieselbe auch auf grosse Spulen angewendet werden kann, was ja häufig vorkommt, und dann, da das Object, dessen Abstand in der dritten Potenz vorkommt und daher genau gemessen werden muss, von dem hierfür geeignetsten Gegenstande, einem Coconfaden, gebildet wird.

1) Bosscha, Pogg. Ann. 93. p. 402. 1854.

2) Maxwell, Treatise etc. 2. p. 354. 1873.

## II. Ueber die durch electricische Kräfte erzeugte Aenderung der Doppelbrechung des Quarzes; von W. C. Röntgen.

(Aus d. 22. Ber. d. Oberh. Ges. f. Natur- u. Heilkunde mitgetheilt vom Hrn. Verf.).

### Zweite Abhandlung.

In einer vorhergehenden Abhandlung<sup>1)</sup> habe ich über das electrooptische Verhalten von Quarzplatten berichtet, welche parallel der optischen Axe geschliffen sind, bei denen somit die Lichtstrahlen senkrecht zu dieser Axe hindurchgingen; am Schluss stellte ich die Mittheilung von Versuchen mit Platten, die senkrecht zur optischen Axe geschliffen sind, in Aussicht. Die meisten der im Folgenden besprochenen optischen Erscheinungen hatte ich damals schon beobachtet, allein es fehlte für dieselben eine Erklärung. Diese ist nunmehr durch eine von mir ausgeführte piëzoelectrische Untersuchung des Quarzes gefunden.

Die vorliegende Abhandlung zerfällt demnach in zwei Theile; der erste enthält die piëzoelectrischen, der zweite die electrooptischen Versuche.

Zur piëzoelectrischen Untersuchung wurden hauptsächlich zwei Quarzstücke von folgender Beschaffenheit verwendet: das eine ist eine kreisrunde, genau senkrecht zur optischen Axe geschliffene Platte (Dicke 0,58 cm; Durchmesser 1,8 cm), das zweite eine Kugel von 3,0 cm Durchmesser. Beide sind, wie die optische Untersuchung lehrte, fast vollständig rein. Es wird aus dem Folgenden zur Genüge hervorgehen, wie sehr es sich empfiehlt, Quarzstücke dieser Form und nicht etwa Krystalle mit den natürlichen Flächen zu benutzen.

Die Platte diente dazu, um zunächst das in der ersten Abhandlung geschilderte piëzoelectrische Verhalten des Quarzes einer directen experimentellen Prüfung zu unterwerfen. Es hat sich dabei ergeben, dass im Quarz senkrecht zur

1) W. C. Röntgen, Ber. d. Oberhess. Ges. für Natur- u. Heilk. 22. p. 49. 1883.

Hauptaxe in der That drei um  $120^\circ$  auseinander liegende Richtungen vorhanden sind, welche die Eigenschaft haben, dass ein in diesen Richtungen auf den Krystall ausgeübter Druck keine Electricität an den Druckstellen erzeugt; es sind dies die drei Axen fehlender Piëzoelectricität. Ein in irgend einer anderen senkrecht zur Hauptaxe stehenden Richtung ausgeübter Druck bringt dagegen an den Druckstellen Electricität hervor, und zwar ist die stärkste Entwicklung in den Richtungen vorhanden, welche die Winkel der drei genannten Axen halbiren. Diese Richtungen nannte ich Axen maximaler Piëzoelectricität. Von den Zeichen der auftretenden Electricitäten gilt das früher Gesagte.

Um auf die Platte in bestimmter Richtung einen Druck auszuüben, wurde eine Krystallpresse von bekannter Construction benutzt. Auf je eine der einander zugewendeten Flächen der beiden Stahlbacken derselben ist ein Hartgummiplättchen und auf dieses ein Stück eines 0,06 cm dicken Silberdrahtes gekittet. Diese Silberdrähte liegen einander genau parallel gegenüber; zwischen ihnen befand sich die Quarzplatte. In dieser Weise wurde erreicht, dass die Druckstellen auf der Platte eine schmale Linie, die parallel der Scheibenaxe ist, bildeten, und dass der Druck genau in der Richtung eines Durchmessers auf die Scheibe ausgeübt werden konnte.

Die Scheibe war mittelst eines ungefähr 4 cm langen Strohhalmes so auf einem in Grade eingetheilten drehbaren Theilkreis befestigt, dass ihre Axe mit der Drehungsaxe des Theilkreises möglichst gut coincidirte; durch Drehen des Theilkreises konnte somit die Richtung, in welcher der Druck auf die Scheibe wirken sollte, geändert werden. Die Grösse der Drehung wurde am Theilkreis abgelesen.

Der Rahmen der Krystallpresse, sowie die Fassung, in welcher sich der Theilkreis drehte, waren durch Klemmen fest mit einem Stativ verbunden. Um auch sicher zu sein, dass der Druck immer in der Richtung eines Durchmessers stattfand, verfuhr ich in folgender Weise. Die Quarzplatte war mit einer dünnen Wachsschicht überzogen, in welcher mittelst einer feinen Nadel nach Aufsuchung des Mittel-



punktes möglichst viele Durchmesser gezogen waren. Durch dieses Hilfsmittel konnte ich mich bei jedem Versuch leicht überzeugen, dass die Verbindungslinie der beiden Druckstellen in der Richtung eines Durchmessers lag.

Das eine der beiden Silberdrähtchen stand in Verbindung mit dem früher erwähnten empfindlichen Electroskop; das andere war zur Erde abgeleitet. Die Versuche bestanden nun darin, dass ich die Richtungen fehlender Piëzoelectricität durch Probiren aufsuchte. Es wird genügen, wenn ich eine Versuchsreihe mittheile.

Ableitung am Theilkreis	Durch Druckzunahme entstehende Piëzoelectricität
0°	stark negativ
20	weniger stark negativ
35	schwach positiv
27	schwach negativ

Nachdem in dieser Weise gefunden war, dass eine der gesuchten Richtungen zwischen den beiden letzten Stellungen der Scheibe liegen musste, wurden die folgenden Versuche angestellt:

Ableitung am Theilkreis	Durch Druckzunahme entstehende Piëzoelectricität	Ableitung am Theilkreis	Durch Druckzunahme entstehende Piëzoelectricität
29°	Spur von negativer Electricität	209°	Spur von positiver Electricität
30	Nichts	210	Nichts
31	Spur von positiver Electricität	211	Spur von negativer Electricität
89°	Spur von positiver Electricität	269°	Spur von negativer Electricität
90	Nichts	270	Nichts
91	Spur von negativer Electricität	271	Spur von positiver Electricität
149°	Spur von negativer Electricität	329°	Spur von positiver Electricität
150	Spur von positiver Electricität	330	Nichts
151	Spur von positiver Electricität	331	Spur von negativer Electricität

Beim Nachlassen der Schraube der Krystallpresse entstanden jedesmal Electricitäten, welche den beim Anziehen erhaltenen entgegengesetzt waren.

Diese Versuche lassen darüber nicht im Zweifel, dass der Winkel zwischen den drei Axen fehlender Piëzoelectrici-

cität  $120^\circ$  beträgt; die eine Abweichung, welche übrigens nicht  $1^\circ$  beträgt, kann sehr wohl von Versuchsfehlern herrühren.

Drucke, welche in den in der Mitte zwischen den Axen fehlender Piëzoelectricität liegenden Richtungen auf die Platte ausgeübt wurden, hatten eine sehr kräftige Electricitätsentwicklung zur Folge; da das benutzte Electroskop nicht für quantitative Versuche eingerichtet ist, so konnte ich nicht bestimmen, wie sich die Menge der Piëzoelectricität mit der Richtung änderte; soviel ist aber sicher, dass die grösste Quantität in jenen Zwischenrichtungen erzeugt wurde. Für eine genaue quantitative Bestimmung wäre es durchaus nöthig, auf die Inductionswirkungen Rücksicht zu nehmen, welche die in den der Druckstelle benachbarten Oberflächentheilen entstehenden Electricitäten auf die mit dem Electroskop verbundene Electrode ausüben. Ueber diesen Einfluss wird unten noch einiges erwähnt werden.

Die Versuche mit der Quarzkugel erforderten einen etwas complicirteren Apparat; auch hier kam es darauf an, dass ein Druck möglichst genau in der Richtung eines Durchmessers auf die Kugel ausgeübt wurde, und dass die dabei entstehende Piëzoelectricität zur Beobachtung kam. Nach mehrfachen Versuchen mit verschiedenen Apparaten behielt ich die folgende Einrichtung als die zweckentsprechendste bei. Die Kugel lag auf dem Objectträger eines alten, grossen Mikroskops, und durch Herunterlassen der beschwerten Mikroskopröhre wurde ein Druck auf dieselbe ausgeübt.

Der Objectträger ist mit den nöthigen Schrauben zur genauen Justirung versehen; in die runde Oeffnung desselben kann je nach Bedarf eine runde dicke Messingscheibe oder eine Hartgummischeibe genau passend eingelegt werden. Die Messingscheibe ist in der Mitte mit einer 0,25 cm weiten Vertiefung versehen, welche zur besseren Unterstützung der aufgelegten Kugel dient; die Kugel berührt die Scheibe somit nicht bloß in einem Punkt, sondern in einem kleinen Kreise. Auf die Hartgummischeibe ist ein 1,0 cm langer, 0,4 cm dicker Messingcylinder gekittet; dieser ist oben ebenfalls mit einer kleinen Vertiefung versehen, welche genau in der Axe der Hartgummischeibe liegt, und auf welcher die

Kugel ruhte. Die Messingscheibe wurde benutzt, wenn die untere Seite der Kugel nicht isolirt zu sein brauchte; die Hartgummischeibe dagegen, wenn eine Isolation erforderlich war.

Die in einer sehr gut gearbeiteten Führung mittelst Trieb und Zahnstange bewegliche Mikroskopröhre ist am unteren Ende (am Objectiv) mit einem durch Hartgummi isolirten, unten abgerundeten Messingstift versehen, welcher den Druck auf die Kugel ausübt. Ich unterlasse es, mitzutheilen, wie die Justirung vorgenommen wurde, und wie ich mich vergewisserte, dass immer der Druck so genau wie möglich in der Richtung eines Durchmessers wirkte. Die Mikroskopröhre war mit zwei Kilo belastet; beim Herunterlassen derselben fand keine merkliche Reibung zwischen dem Messingstift und der Kugel statt. Eine solche ist auch nach Kräften zu vermeiden, da dieselbe eine ziemlich starke Electricitätsentwicklung zur Folge haben würde.

Weil ich beabsichtigte, auch diejenigen Stellen der Kugel auf Piëzoelectricität zu prüfen, auf welche der Druck nicht direct wirkte, so wurde das Goldblatt des Electroskops nicht immer mit dem den Druck ausübenden Messingstift verbunden, sondern öfters mit einem kleinen, an einem Hartgummistab befestigten metallenen Halter, in welchen je nach Bedarf ein einfacher Messingdraht oder ein mit einem kleinen Metallscheibchen versehener Draht eingesetzt werden konnte.<sup>1)</sup> Der Hartgummistab wurde von einem mit Gelenken versehenen Stativchen getragen, wodurch es ermöglicht war, dass der als Electrode dienende Messingdraht, resp. das Metallscheibchen an jede Stelle der Quarzkugel angelegt werden konnte.

Mit dieser Kugel wurden nun folgende Versuche gemacht:

1) Ausser den drei Axen fehlender Piëzoelectricität besitzt auch die Hauptaxe des Quarzes die Eigenschaft, dass

1) Bei der Construction dieser Theile wurde darauf Rücksicht genommen, dass dieselben eine möglichst geringe Capacität erhielten. Der wesentliche Vorzug des Fechner'schen Electroskops gegen das Thomson'sche Electrometer besteht nämlich, abgesehen von einer mehr gesicherten Isolation, in der ungemein kleinen Capacität; dadurch ist dasselbe zu den vorliegenden Untersuchungen so sehr geeignet.

ein in dieser Richtung auf den Krystall ausgeübter Druck keine Electricität an den Druckstellen hervorbringt. Es fragte sich, ob noch mehr solche Richtungen existiren.

Ohne mich vorher auf optischem Wege über die Richtung der Hauptaxe orientirt zu haben, legte ich die Kugel auf die besprochene Messingscheibe des Objectträgers, verband den den Druck ausübenden Stift mit dem Electroskop und suchte diejenigen Stellen auf der Kugel auf, welche nicht piëzoelectrisch wurden, wenn dort ein Druck in der Richtung eines Durchmessers auf die Kugel wirkte. War eine solche Stelle gefunden, so wurde dieselbe jedesmal auf der Kugel dadurch markirt, dass der Stift mit etwas Tusche versehen und bis zur Berührung mit der Kugel gesenkt wurde. In dieser Weise erhielt die Kugel 40 bis 50 kleine Punkte. Selbstverständlich hat man bei diesem Suchen möglichst systematisch zu verfahren. Man findet z. B. bald, dass gewisse grössere zusammenhängende Partien der Kugel nur sehr schwach electrisch werden; es sind dies, wie sich nachher herausstellte, die Stücke der Oberfläche, welche in der Nähe der Enden eines der Hauptaxe parallelen Durchmessers liegen; hier ist es schwer, die Stellen genau anzugeben, wo gar keine Piëzoelectricität entsteht; deshalb wird man auch diese Stellen nicht markiren.

Aus einer Prüfung der mit Punkten versehenen Quarzkugel ergab sich nun das Resultat, dass die Lage dieser Punkte einfach bestimmt ist durch drei Ebenen, welche sich unter  $120^\circ$  in dem der Hauptaxe parallelen Durchmesser schneiden und die drei Axen fehlender Piëzoelectricität enthalten. Die in dieser Weise aufgefundene Richtung der Hauptaxe stimmte mit der nachträglich auf optischem Wege gefundenen gut überein.

Es geht hieraus hervor, dass alle in den drei genannten Ebenen enthaltenen Richtungen, Richtungen fehlender Piëzoelectricität sind; ein in einer dieser Richtungen auf den Krystall ausgeübter Druck liefert an den Druckstellen keine Electricität. Diese Ebenen seien deshalb Ebenen fehlender Piëzoelectricität genannt.

Die folgenden Werthe wurden bei der beschriebenen

Kugel durch Messung der sechs zwischen jenen drei Ebenen eingeschlossenen Winkel erhalten:

58°, 61°, 60°, 60°, 59°, 62°.

Diese Winkel müssten genau 60° sein. Die vorhandenen Abweichungen können zum Theil von Versuchsfehlern herrühren; dieselben sind aber vielleicht auch eine Folge von geringen Verwachsungen und Unregelmässigkeiten des Quarzes, deren Vorhandensein sich in Anbetracht der Kugelgestalt des Krystalles nicht auf optischem Wege nachweisen liess. Solche Verwachsungen beeinflussen, wie schon Hr. Hankel bei Krystallen mit natürlichen Flächen gefunden hat, die Vertheilung der Piëzoelectricität sehr beträchtlich, so bekam ich z. B. bei einer anderen Kugel, die deutlich sichtbare Unregelmässigkeiten zeigte, folgende Winkel:

51°, 54°, 69°, 57°, 64°, 65°.

Die Versuche mit der ersten Kugel wurden einige mal wiederholt, so z. B. einmal bei einer Temperatur von ungefähr 10° C., das zweitemal bei ungefähr 31° C.; ich fand immer dieselbe Lage der drei Ebenen wieder.

2) Nachdem die Lage der Ebenen fehlender Piëzoelectricität auf der Kugel aufgefunden und markirt war, untersuchte ich, wie sich die zwischen diesen Meridianen liegenden Felder piëzoelectrisch verhielten. Es fand sich, dass an den verschiedenen Druckstellen, die in je einem der sechs Felder liegen, immer dieselbe Electricitätsart auftrat, dass diese aber wechselte, wenn man von einem Feld zum nächstfolgenden überging. Die ganze Kugel ist somit in sechs abwechselnd positiv und negativ piëzoelectrische Felder zu theilen. Zum besseren Verständniss des Folgenden wird es gut sein, sie mit 1, 2, 3, 4, 5, 6 zu bezeichnen und anzugeben, dass an den auf dem ersten Feld liegenden Druckstellen positive Electricität entstand; dem entsprechend wurden die Felder der Reihenfolge nach mit den Zeichen +, -, +, -, +, -, versehen.

Es ergab sich weiter, dass die stärkste Electricitätsentwicklung an den Druckstellen in Richtungen gefunden wurde, welche senkrecht zur Hauptaxe stehen und die Winkel der Ebenen fehlender Piëzoelectricität halbiren; es sind dies die

in der ersten Abhandlung schon als Axen maximaler Piëzoelectricität bezeichneten Richtungen.

Ich brauche wohl kaum zu bemerken, dass Druckverminderungen die entgegengesetzten Electricitätsarten hervorbrachten, wie Druckvermehrung; dasselbe gilt für alle folgenden Versuche.

3) Ein in der Richtung einer Axe fehlender Piëzoelectricität ausgeübter Druck entwickelt an den Druckstellen keine Electricität: es fragte sich aber, ob unter diesen Umständen nicht an anderen Stellen der Kugel Piëzoelectricität auftritt.<sup>1)</sup> Zur Beantwortung dieser Frage wurde die Kugel so auf die Messingscheibe gelegt, dass die Hauptaxe senkrecht zur Druckrichtung lag, und der Druck in der Richtung einer Axe fehlender Piëzoelectricität wirkte. Das Electroskop stand mit der beschriebenen isolirten Electrode in Verbindung, welche bei unveränderter Druckrichtung nacheinander an verschiedenen Stellen der Kugel angelegt wurde.

Ich erhielt folgende Resultate: Die Ebene fehlender Piëzoelectricität, in welcher der Druck wirkte, theilt die Kugel in zwei Hälften, die in ihrer ganzen Ausdehnung electrisch werden; die eine Hälfte ist positiv, die andere negativ electrisch. Das Zeichen der auf je einer Hälfte auftretenden Piëzoelectricität richtet sich nach dem oben gefundenen Zeichen der beiden auf der betreffenden Hälfte liegenden, der Druckrichtung benachbarten Felder. Findet z. B. der Druck in der das Feld 1 von 6 und Feld 3 von 4 trennenden Ebene statt, so wird die Hälfte, auf welcher die Felder 1 und 3 liegen, positiv, die andere negativ electrisch.

Das Maximum der Entwicklung liegt an den Enden einer Axe maximaler Piëzoelectricität, welche senkrecht zur Druckrichtung steht; in dem obigen Beispiel somit in der Mitte der Felder 2 und 5. Keine Electricität entsteht auf dem Kreis, in welchem die die Druckrichtung enthaltende Ebene fehlender Piëzoelectricität die Kugel schneidet.

1) Hr. J. und P. Curie haben gefunden, dass ein Druck, welcher in der Richtung einer Axe fehlender Piëzoelectricität auf ein Quarzparallelepiped ausgeübt wird, zur Folge hat, dass die Enden der zur Druckrichtung senkrechten Axe maximaler Piëzoelectricität electrisch werden.

Dasselbe Resultat wurde auch erhalten, wenn die Kugel auf dem isolirten Messingcylinder lag, oder wenn die Unterlage und der drückende Messingstift abgeleitet waren.

4) Es fragte sich nun weiter, wie die freie Oberfläche der Kugel sich verhielt, wenn der Druck in einer Axe maximaler Piëzoelectricität wirkte.

Die Quarzkugel wurde in richtiger Stellung auf den isolirten Messingcylinder gelegt, der Messingstift blieb ebenfalls isolirt. Die electriche Untersuchung der Oberfläche ergab dann, dass die Kugel auch jetzt wiederum in zwei mit entgegengesetzten Electricitäten geladene Hälften getheilt war, die durch eine Ebene fehlender Piëzoelectricität, welche senkrecht zur Druckrichtung steht, getrennt war. Das Zeichen der Electricitäten richtet sich nach dem oben gefundenen Zeichen der Felder, in welchen die Druckstellen liegen. Befand sich z. B. Feld 1 oben, somit Feld 4 unten, so wurde die obere Hälfte positiv, die untere negativ electricisch. Das Maximum der Electricitäten trat an den Druckstellen auf; gar keine Electricität erschien auf dem Kreis, in welchem die zur Druckrichtung senkrechte Ebene fehlender Piëzoelectricität die Kugel schneidet.

Wenn die beiden Druckstellen zur Erde abgeleitet waren, so fand ich im wesentlichen dieselbe Vertheilung der Electricität.

5) Die Kugel wurde in einer Richtung gepresst, welche zwischen einer Axe fehlender und der nächsten Axe maximaler Piëzoelectricität, somit noch immer senkrecht zur Hauptaxe lag; beide Druckstellen waren isolirt. Auch dann war die Kugel durch eine durch die Hauptaxe gehende Ebene in zwei entgegengesetzt electriche Hälften getheilt; dieselbe war jedoch nicht mehr parallel oder senkrecht zur Druckrichtung, sondern lag immer in dem spitzen Winkel, welchen die Druckrichtung mit der zweitfolgenden Axe fehlender Piëzoelectricität bildete. Der spitze Winkel zwischen der Druckrichtung und der Halbirungsebene war desto kleiner, je näher die Druckrichtung der Axe fehlender Piëzoelectricität lag. Änderte man von einem Versuch zum anderen die Druckrichtung in der Weise, dass man mit der



Richtung maximaler Piëzoelectricität anfang und mit der Richtung der nächstfolgenden Axe fehlender Piëzoelectricität aufhörte, so änderte sich die Lage der die Kugel halbirenden Ebene durch Drehung um die Hauptaxe um einen Winkel von  $90^{\circ}$ .

Die Zeichen der Electricitäten richteten sich nach den Zeichen der Felder, in welchen die Druckstellen lagen. Befand sich die Druckstelle z. B. in Feld 1, dem Feld 2 aber näher als 6, so war die Halbkugel, welche einen Theil des Feldes 2, die ganzen Felder 1 und 6 und einen Theil von 5 enthielt, positiv, die andere Halbkugel negativ electricisch.

Wirkte der Druck in einer Richtung, welche den Winkel zwischen einer Axe maximaler und der nächstfolgenden Axe fehlender Piëzoelectricität halbirte, so machte die Halbiringsebene mit der Druckrichtung einen Winkel, der jedenfalls nicht viel von  $45^{\circ}$  abwich; eine genauere Bestimmung dieses Winkels war mir mit den angewandten Apparaten nicht möglich.

Das Maximum der Piëzoelectricität fand sich an den Enden eines Durchmessers, der senkrecht zur Halbiringsebene stand; im zuletzt erwähnten Fall folglich an den Enden eines Durchmessers, der senkrecht zur Axe stand und um  $45^{\circ}$  gegen die Druckrichtung geneigt war, d. h. an den Enden einer Axe fehlender Piëzoelectricität.

Bei den nun folgenden drei Versuchsreihen waren die entstehenden Electricitätsmengen so schwach, dass ich die mitgetheilten Resultate nicht als unzweifelhaft richtig bezeichnen kann. Ich glaube zwar nicht, dass durch Anwendung von empfindlicheren Apparaten etwas anderes gefunden wird, allein eine solche Controle wäre doch wünschenswerth.

6) Als Druckrichtung wurde eine zwischen einer Axe maximaler Piëzoelectricität und der Hauptaxe liegende gewählt. Die Kugel wurde durch diejenige Ebene fehlender Piëzoelectricität, welche senkrecht zu der durch die Druckrichtung und die Hauptaxe gelegten Ebene stand, in zwei entgegengesetzt electricische Hälften getheilt.

Das Zeichen der Electricitäten richtete sich nach den Zeichen der Felder, in welchen die Druckstellen lagen; be-

fanden sich diese z. B. in Feld 1 und 4, so wurden die Felder 6, 1 und 2 positiv, die Felder 3, 4 und 5 negativ electrisch.

7) Der Druck wurde in irgend einer Richtung, welche von den oben angegebenen verschieden ist und nicht mit der Hauptaxe zusammenfällt, ausgeübt. Die Kugel wurde dann immer durch eine Ebene, welche unter allen Umständen durch die Hauptaxe ging, in zwei entgegengesetzt electrische Hälften getheilt.

8) Bei Zunahme eines Druckes in der Richtung der Hauptaxe wurden auf den sechs Feldern schwache Mengen Electricität gefunden, deren Zeichen den oben gefundenen Zeichen der Felder entsprechen; die Druckstellen blieben unelectrisch.

Aus dem Obigen geht hervor, dass, wie auch der Druck gerichtet war, an den Enden des parallel der Hauptaxe verlaufenden Durchmessers niemals eine merkliche Electricitätsentwicklung stattfand.

Es ist zu erwähnen, dass die piëzoelectrischen Versuche bei trockener Zimmerluft ausserordentlich sicher und regelmässig verlaufen.

Gegen die mitgetheilten Resultate könnte der Einwand erhoben werden, dass dieselben durch Induction, sowie möglicherweise durch Leitung der Electricität an der Oberfläche beeinflusst sind. Es lässt sich auch nicht leugnen, dass diese und insbesondere die Inductionen eine Rolle spielten; ich habe mich aber mehrfach davon überzeugt, dass jene Resultate qualitativ unverändert bestehen bleiben, wenn man solche Einflüsse ausschliesst. Nur einige dahin gehörige Versuche mögen hier besprochen werden; dieselben sollen darthun, wie vorsichtig man verfahren muss, und wie man die Resultate prüfen kann.

Zwei gegenüberliegende Felder der Kugel, etwa 2 und 5, wurden vollständig mit Stanniol belegt, jedoch so, dass die beiden Stanniolstreifen sich nicht berührten; darauf legte ich die Kugel so auf den isolirten Messingcylinder, dass der Druck in der Richtung einer Axe fehlender Piëzoelectricität stattfand, welche von der Grenze der Felder 1 und 6 zu

der Grenze der Felder 3 und 4 hinübergang. Der den Druck ausübende Stift war mit dem Electroskop in Verbindung. Wenn dann alle Felder isolirt blieben, so zeigte das Electroskop bei Druckänderungen keine Electricität an; wurde dagegen etwa Feld 2 abgeleitet, so fand sich positive Electricität, die durch die Induction des stark positiv geladenen Feldes 5 erzeugt wurde; kein Ausschlag des Goldblattes war zu beobachten, wenn Feld 5 ebenfalls abgeleitet war. Eine negative Ladung erhielt das Electroskop, wenn nur Feld 5 abgeleitet wurde. Im Fall die Felder 2 und 5, sowie durch Berühren mit dem Finger auch Feld 1 abgeleitet waren, erhielt ich einen schwachen Ausschlag des Goldblattes nach der negativen Seite, welche von der Induction der auf Feld 6 entstehenden negativen Electricität herrührte.

Um nachzuweisen, dass in der angegebenen Lage der Kugel wirklich die ganzen Kugelhälften und nicht etwa nur die Felder 2 und 5 electrisch wurden, leitete ich diese Felder ab und legte die mit dem Electroskop verbundene Electrode der Reihe nach an die Felder 1, 3, 4 und 6 an. Ich fand dieselben bei Druckzunahme zwar schwach, aber sicher positiv, resp. negativ electrisch.

Legte ich die Kugel auf die abgeleitete Messingscheibe mit den belegten Stellen nach unten, resp. nach oben, und übte ich einen Druck aus in der Richtung einer Axe maximaler Piëzoelectricität, so erhielt ich auf der ganzen Kugel positive Electricität, wenn das positive Feld 5, dagegen negative Electricität, wenn das negative Feld 2 oben lag. In diesen Fällen überwog die Inductionswirkung der oben entstehenden Piëzoelectricität der Wirkung der schwachen, auf der unteren Kugelhälfte vorhandenen entgegengesetzten Electricität. Die normalen Verhältnisse traten sofort ein, wenn auch das unten liegende Feld isolirt wurde.

Bei dieser Stellung der Kugel konnte ich bestätigen, dass auf der ganzen oberen und der ganzen unteren Kugelhälfte und nicht etwa allein an den Druckstellen Electricität auftrat. Wurden nämlich die belegten Felder abgeleitet, so fand ich trotzdem auf den anderen qualitativ dieselbe Electricitätsvertheilung wie vorher.

Ich gehe nun über zu der Mittheilung der electrooptischen Versuche. Zu denselben wurden die in der ersten Abhandlung beschriebene quadratische Quarzplatte, welche parallel der Säulenfläche geschnitten ist, sowie das mit II bezeichnete Parallelepipet und ein kleiner Quarzcyylinder gebraucht. Bezüglich der näheren Beschreibung der beiden erstgenannten Krystalle verweise ich auf die erste Abhandlung.

Die Platte wurde sowohl im parallelen als im convergenten Lichte untersucht. Bei den Versuchen im parallelen Lichte befand sich dieselbe in horizontaler Lage in der mit Benzol gefüllten Flasche; die untere Electrode war die mit zwei Glasstreifen versehene Messingscheibe, die obere ein in die Vertiefung der Platte ragender Messingdraht (vgl. die frühere Versuchsanordnung). Das unter  $45^\circ$  gegen die Horizontale, geradlinig polarisirte Natriumlicht ging parallel der Hauptaxe durch die Platte, und der Analysator war auf dunkel gestellt. Während des Electrisirens zeigte sich eine lebhafte Erhellung der Mitte des Gesichtsfeldes, der Stelle unter der Vertiefung in der Platte. Die Vertheilung der hellen Stellen war verschieden, je nachdem sich oben oder unten die positive Electricität befand.

Das Resultat überraschte mich, da durch electricische Kräfte, welche in der Richtung einer Axe fehlender Piëzoelectricität wirken, keine Compression oder Dilatation in dieser Richtung erzeugt werden dürfte.

Ebenso überraschte mich das Verhalten der Platte im convergenten Lichte. Dasselbe brachte mich zwar einer Erklärung des ersten Versuches näher, die vollständige Erklärung erhielt ich aber erst nach Ausführung der oben beschriebenen piëzoelectricischen Versuche.

Um die Platte im convergenten Lichte zu untersuchen, kittete ich gegen die quadratischen Flächen derselben 0,7 cm weite, nach oben rechtwinklig gebogene Glasröhren, die mit Quecksilber gefüllt wurden. Darauf brachte ich die Platte so unter ein Steeg'sches Polarisationsmikroskop, dass das aus concentrischen Kreisen bestehende Axenbild zur Beobachtung kam; die Beleuchtung geschah wieder durch eine Natriumflamme.

Das Quecksilber in den beiden Glasröhren war mit je einer der Electroden der Electrisirmaschine verbunden. Im Augenblicke, wo die Electricität der Platte zugeführt wurde, verwandelten sich die Kreise in Ellipsen; die grosse Axe derselben, welche länger war als der entsprechende Kreisdurchmesser, machte einen Winkel von  $45^\circ$  mit den Kraftlinien (die senkrecht zur quadratischen Fläche der Platte standen); die kleine Axe war kleiner als der Kreisdurchmesser. Lag die Platte so unter dem Mikroskop, dass die durch Druck positiv werdende Seite sich rechts, somit die durch Druck negativ werdende Seite sich links befand, und wurde der dem Beobachter zugewendeten Seite der Platte positive, der abgewendeten Seite negative Electricität zugeführt, so war die grosse Axe von links oben nach rechts unten gerichtet. Nach einem Wechsel der zugeführten Electricitäten hatte die grosse Axe die zu der vorigen senkrechte Richtung, somit von rechts oben nach links unten.

Es ist nun bekannt<sup>1)</sup>, dass eine mechanische Compression, resp. Dilatation einer senkrecht zur Axe geschliffenen Quarzplatte in einer zur Axe senkrechten Richtung eine Veränderung des Ringsystems erzeugt, welche der soeben besprochenen ähnlich ist. Die Durchmesser der Kreise werden in der Richtung der Compression verlängert und in der dazu senkrechten Richtung verkürzt. Wird dagegen die Platte dilatirt, so liegt die grosse Ellipsenaxe senkrecht zur Richtung der Dehnung.

Die Resultate der beiden letzten Versuche würden somit erklärt sein, wenn die Annahme erlaubt wäre, dass electrische Kräfte, welche in der Richtung einer Axe fehlender Piëzoelectricität wirken, zwar keine Formveränderungen in der Richtung dieser Axe erzeugen, wohl aber eine Compression oder Dilatation oder beide zugleich in Richtungen, welche senkrecht zur Hauptaxe liegen und unter  $45^\circ$  gegen die betreffende Axe fehlender Piëzoelectricität geneigt sind, zur Folge haben. Inwieweit diese Annahme gerechtfertigt ist, konnte ich nicht entscheiden, bevor die beschriebenen

1) Pfaff, Pogg. Ann. 107. p. 133. 1859.

Versuche über Piëzoelectricität angestellt waren; und deshalb habe ich mit der Veröffentlichung meiner electrooptischen Versuche mit senkrecht zur Axe geschliffenen Platten bis jetzt gewartet.

Aus den unter 5) mitgetheilten piëzoelectrischen Versuchen und dem von Lippmann ausgesprochenen Gesetz der Reciprocität von Compression und electriccher Ladung ergibt sich die Bestätigung der Richtigkeit jener Annahme und somit die vollständige Erklärung obiger Versuche.

Es wurde am citirten Orte gefunden, dass ein Druck, welcher unter  $45^\circ$  gegen eine Axe fehlender Piëzoelectricität und senkrecht zur Hauptaxe auf den Quarz ausgeübt wird, an den Enden jener Axe Piëzoelectricität erzeugt, und zwar eine Menge, die grösser ist, als jede an anderen Stellen entstehende. Theilt man somit jenen Enden dieselben Electricitäten mit, welche durch Druck in der angegebenen Richtung entstehen würden, so muss in dieser Richtung eine Dilatation des Quarzes stattfinden; und umgekehrt theilt man den Enden Electricitäten mit, die den durch Druck entstehenden entgegengesetzt sind, so muss in dieser Richtung eine Compression auftreten. Solche Richtungen, die senkrecht zur Hauptaxe stehen und unter  $45^\circ$  gegen eine Axe fehlender Piëzoelectricität geneigt sind, gibt es nun für jede Axe fehlender Piëzoelectricität zwei, nämlich je eine auf beiden Seiten dieser Axe. Aus dem unter 5) Gesagten geht weiter hervor, dass die Electricitäten, welche entstehen, wenn ein Druck in der einen dieser zwei Richtungen ausgeübt wird, den Electricitäten entgegengesetzt sind, welche bei einem Druck in der anderen Richtung auftreten. Wenn man folglich dem einen Ende einer Axe fehlender Piëzoelectricitäten positive und dem anderen negative Electricität zuführt, so muss diese Electricisirung eine Compression in einer jener beiden Richtungen und zugleich eine Dilatation in der anderen bewirken. Werden die zugeführten Electricitäten gewechselt, so muss auch ein Wechsel zwischen Compression und Dilatation stattfinden. Das soeben Gesagte ist aber nichts anderes, als was oben zur Erklärung der electrooptischen Versuche angenommen wurde.

Das in der ersten Abhandlung mit II bezeichnete Quarzparallelepiped wurde nun ebenfalls sowohl im parallelen als im convergenten Natriumlicht untersucht. Im ersten Falle war dasselbe genau wie früher in der mit Benzol gefüllten Flasche aufgestellt, nur mit dem Unterschied, dass jetzt die Lichtstrahlen parallel der Hauptaxe durchgingen. Wenn dann der Analysator auf dunkel gedreht war, so wurde durch das Electrisiren die Stelle zwischen den Bohrlöchern intensiv erhellt; die Vertheilung der hellen Partien änderte sich beim commutiren. Beides war zu erwarten, da die Bohrlöcher in der Richtung einer Axe maximaler Piëzoelectricität angebracht sind.

Um die Art der erzeugten Doppelbrechung zu untersuchen, konnte auch jetzt wie bei der Quarzplatte von vornhin das früher angewandte Mittel einer eingeschalteten Glasplatte, die in horizontaler oder verticaler Richtung comprimirt wurde, nicht gebraucht werden, da durch die in der Richtung der Hauptaxe vorhandene Drehung der Polarisationssebene die Verhältnisse complicirter waren als früher; deshalb nahm ich die Untersuchung im convergenten Licht vor.

Zu diesem Zweck wurden gegen die Endflächen des Parallelepipeds rechtwinklig nach oben gebogene Glasröhren gekittet und diese sowie die damit communicirenden Bohrlöcher mit Quecksilber gefüllt. Die durch Electrisirung entstehende Aenderung des in der Mitte zwischen den Bohrlöchern liegenden Ringsystems bestand nun wiederum darin, dass die Kreise zu Ellipsen wurden, deren grosse Axen grösser, und deren kleine Axen kleiner waren, als der Durchmesser des entsprechenden Kreises. Die Richtung der langen Axe war parallel mit der Verbindungslinie der Bohrlöcher, folglich parallel mit der Richtung der betreffenden Axe maximaler Piëzoelectricität, wenn das bezeichnete Ende des Krystalls positiv, das nicht bezeichnete Ende negativ electricisch war. Diese Axe stand dagegen senkrecht zu jener Richtung, wenn das bezeichnete Ende negativ und das nicht bezeichnete Ende positiv electricisch war.

Berücksichtigt man das in der ersten Abhandlung angegebene piëzoelectrische Verhalten des benutzten Krystalles,



so findet man leicht mit Hülfe der unter 3 und 4 aufgeführten piezoelectrischen Versuche, dass die beobachtete optische Erscheinung vollständig zu erklären ist durch die Zusammenwirkung einer electricischen Contraction in einer und einer Dilatation in der dazu senkrechten Richtung.

Ich komme nun zu den Versuchen mit dem kleinen Quarzcyylinder. Die Axe des Cylinders ist parallel der Hauptaxe, der Durchmesser beträgt 0,45 cm, die Höhe 0,5 cm; derselbe ist genau centrisc in der Richtung der Axe in einer Weite von 0,08 cm durchbohrt; die Endflächen sind polirt. Ich untersuchte zunächst das piezoelectrische Verhalten desselben und markirte die Richtungen der drei Axen fehlender Piezoelectricität. Dann kittete ich denselben mittelst Canadabalsam mit den Endflächen auf je zwei 4,5 cm lange, 1,5 cm breite Glasplatten, die beide an einer Stelle in einer Weite von ebenfalls 0,08 cm durchbohrt sind. Die Durchbohrung der einen Platte coincidirt genau mit der Durchbohrung des Cylinders; die Durchbohrung der anderen liegt 2 cm vom Cylinder entfernt. Die Ränder des Glasplatten, die paarweise parallel sind, wurden durch aufge kittete Glasstreifen miteinander verbunden, so, dass ein Glaskästchen entstand, welches durch die Durchbohrung der einen Glasplatte mit Quecksilber gefüllt wurde. Dieses Quecksilber umgibt vollständig die Mantelfläche des Quarzcyinders, bildet die äussere Belegung desselben und steht bei den Versuchen durch einen Draht mit einer Electrode der Holtz'schen Electrisirmaschine in Verbindung. Die innere Belegung ist ein durch die andere Glasplatte gehender, in die Durchbohrung des Cylinders eingesteckter dünner Draht, der zu der anderen, zur Erde abgeleiteten Electrode führte.

Das beschriebene Präparat wurde so unter das Steeg'sche Polarisationsmikroskop gelegt, dass der erste Kreis des Ringsystems concentrisch mit der Durchbohrung des Cylinders war und unter Anwendung von Natriumlicht deutlich beobachtet werden konnte; es ist dazu erforderlich, dass das obere Linsensystem des Apparates sich in einer gewissen, leicht aufzufindenden Entfernung von dem Präparat befindet.

Das Electrisiren der beiden Belegungen des Quarzcylin-



ders hatte nun die nachstehenden Erscheinungen zur Folge. Nur die sechs Stellen des Kreises, welche in der Richtung der drei durch die Mitte gehenden Axen fehlender Piëzoelectricität lagen, behielten ihre Lage bei, an allen anderen Stellen fand eine Verschiebung nach dem Centrum hin, oder von diesem weg statt; dieselbe war am grössten in den durch die Mitte gehenden Richtungen der drei Axen maximaler Piëzoelectricität. In je einer dieser Richtungen war auf der einen Seite von der Mitte eine Verschiebung nach innen, auf der anderen eine Verschiebung nach aussen zu beobachten, und zwar in jedem Fall dem piëzoelectrischen und dem früher gefundenen electrooptischen Verhalten des Quarzes in diesen drei Richtungen entsprechend. Der Ring erhielt durch diese Verschiebungen eine Gestalt, welche der eines gleichseitigen Dreiecks mit abgerundeten Ecken ähnlich ist. Durch ein Wechseln der Electricitäten änderte sich die Lage des Dreiecks in der Weise, dass die neue Lage durch eine Drehung des Dreiecks um  $180^\circ$  in seiner Ebene aus der früheren hervorgeht. — Die besprochene Versuchsanordnung ist zunächst deshalb bemerkenswerth, weil man bei derselben mit einem Blick die in den sechs erwähnten, ausgezeichneten Richtungen stattfindenden Vorgänge übersehen kann; das erhaltene Resultat gab ausserdem Veranlassung zu weiteren electrischen Versuchen mit Quarz, über welche ich in einer folgenden Mittheilung zu berichten hoffe.<sup>1)</sup>

Ich halte es für überflüssig, noch mehr electrooptische Versuche mit Quarz mitzutheilen, da alle bisher von mir gefundenen Erscheinungen sich aus dem piëzoelectrischen Verhalten ableiten lassen. Inwieweit auch die den Ausgangspunkt meiner Untersuchung bildenden Hypothesen in allen Fällen stichhalten, muss durch eine anzustellende Rechnung untersucht werden.

Giessen, im Januar 1883.

1) Ich habe Hrn. Dr. Steeg und Reuter in Homburg v. d. Höhe die Anfertigung von Quarzpräparaten, welche zu electrooptischen Versuchen dienen, übertragen; dieselben können auf Wunsch vor ihrer Ablieferung unter meiner Leitung untersucht werden.

### III. *Electrische Untersuchungen;* *von Carl Fromme.*

#### 1. Abhandlung.

#### Ueber das Verhalten von Platin, Palladium, Gold, Gaskohle und Aluminium in Chromsäurelösung.

In der vorliegenden und in zwei folgenden Abhandlungen sind die Resultate einer Experimentaluntersuchung enthalten, welche im Jahre 1879 begonnen und 1881 beendet wurde, und über welche auch schon Ende 1881 ein kurzer Bericht<sup>1)</sup> von mir erstattet worden ist, während das Resultat der ersten Versuche bereits der physikalischen Section der Naturforscherversammlung zu Baden-Baden (1879) mitgetheilt wurde.<sup>2)</sup>

#### I. Platin in Bunsen'scher Chromsäurelösung.

##### 1. Die electromotorische Kraft eines geöffneten und eines geschlossenen Elements.

Im Jahre 1842 hat Poggendorff<sup>3)</sup> gezeigt, dass, wenn man die (käuflche) Salpetersäure des Grove'schen Elements durch Chromsäurelösung ersetzt, nicht allein die electromotorische Kraft (E. K.) desselben im Verhältniss von 100:62 sinkt, sondern dass auch die Eigenschaft der Constanz dem Elemente völlig verloren geht, indem die Stromstärke bedeutend zunimmt: Der angegebene Werth der E. K. ist ihr Maximalwerth, welcher erst nach längerer Stromschliessung erreicht wird. Diese Thatsachen waren deshalb auffällig, weil das Bunsen'sche Element durch Einführung der Chromsäure an Stelle der Salpetersäure eine etwas grössere E. K. erhielt, ohne an seiner Constanz eine besondere Einbusse zu erleiden.

1) Fromme, Ber. d. Oberh. Ges. für Natur- u. Heilk. 21. p. 1—14. 1881.

2) Fromme, Tageblatt p. 178.

3) Poggendorff, Pogg. Ann. 57. p. 101. 1842.

Die gleichen Beobachtungen wurden später von Buff<sup>1)</sup> gemacht.

In Bezug auf die Erklärung dieses der Kohle gegenüber ganz abnormen Verhaltens des Platins gehen die Ansichten der beiden Physiker auseinander. Buff glaubt, die Ursache in der kleinen Oberfläche eines Platinbleches gegenüber der grossen Oberfläche eines porösen Kohlestücks suchen zu müssen, und gibt auch an, dass er nach Tränkung der Kohle mit Wachs mit dieser einen ebenso inconstanten Strom wie mit Platin erhalten habe.

Poggendorff dagegen zieht aus seinen Versuchen den Schluss, dass die electrische Stellung der Metalle in der Spannungsreihe durch die Flüssigkeiten geändert werde, auch wenn, wie dies bei Platin und Kohle der Fall ist, ein chemischer Angriff durch die Flüssigkeit nicht stattfindet.

Demnach legt Poggendorff der Verschiedenheit des electrischen Verhaltens von Platin und Kohle eine primäre Ursache, Buff dagegen eine secundäre unter, nämlich eine durch die kleine Oberfläche eines Platinblechs bedingte Polarisation, „welche sich freilich in gerade entgegengesetzter Weise, als sonst bekannt, nämlich in einer Zunahme der Stromstärke äusserte.“

In der Folge hat man die Erklärung Poggendorff's acceptirt<sup>2)</sup> und sich mit derselben bis jetzt zufrieden gegeben, obwohl die von Poggendorff und Buff constatirte Thatsache auch bei theoretischen Untersuchungen unbequem war.<sup>3)</sup>

Zu einer Prüfung der Poggendorff'schen Erklärung — die Arbeit von Buff war mir anfänglich unbekannt — veranlasste mich einestheils die Erfahrung<sup>4)</sup>, dass die von Poggendorff benutzte Ohm'sche Methode der Messung electromotorischer Kräfte selbst bei einem als constant vorausgesetzten Element Resultate liefern kann, welche mit dem

1) Buff, Lieb. Ann. 101. p. 1. 1857. cf. auch Du Moncel, Dingl. Journ. 203. p. 375. 1872.

2) G. Wiedemann, Galv. (2) 1. p. 411. 1872.

3) Braun, Wied. Ann. 5. p. 204. 1878.

4) Fromme, Wied. Ann. 8. p. 328—335. 1879.

unter Einschaltung grosser Widerstände mit einem Galvanometer gewonnenen nicht übereinstimmen, anderentheils die Beobachtung<sup>1)</sup>, dass unter Umständen auch bei der Combination Platin-Salpetersäure (Grove'sches Element) eine ähnlich grosse Zunahme der Stromstärke, wie sie Poggendorff bei Platin-Chromsäure erhalten hatte, vorkommt.

Ich habe deshalb zugleich mit Messungen der E. K. nach der Ohm'schen Methode auch solche mit dem Electrometer bei geöffnetem Element ausgeführt. Ausser dem Grove'schen Element wurde auch das Bunsen'sche mit Bezug auf den Einfluss, welchen die Ersetzung der Salpetersäure durch Chromsäure auf seine E. K. ausübt, geprüft, sowie auch die schon von Poggendorff untersuchte Combination Zink-Schwefelsäure-Kupfer-Chromsäure.

Die benutzten Elemente waren von der früher (l. c.) beschriebenen Form, die Tangentenbussole mit Spiegelablesung ist dort ebenfalls beschrieben. Das Electrometer war Kirchhoff'scher Construction. Die Schwefelsäure war stark verdünnt, die Chromsäurelösung nach Bunsen's Vorschrift<sup>2)</sup> bereitet, die Salpetersäure hatte das spec. Gew. 1,4.

Bei den Messungen nach der Ohm'schen Methode erhielt der Schliessungskreis einen Rheostatenwiderstand von 20 bis 5 S.-E., der sonstige äussere Widerstand war sehr gering. Die Messungen der Stromintensität lieferten folgende Resultate.

Bei Platin — concentrirter Salpetersäure nimmt die Stromstärke ein wenig zu, bei Kohle — concentrirter Salpetersäure ein wenig ab, wie schon früher (l. c.) von mir gefunden. Bei Platin-Chromsäure findet, wie auch Poggendorff und Buff beobachteten, eine sehr starke Zunahme, bei Kohle — Chromsäure eine kleine Abnahme statt, welche grösser ist, als bei Kohle-Salpetersäure. Kupfer-Chromsäure liefert einen zwar schwachen, aber vollkommen constanten Strom. Nach Ablauf einiger Minuten wurde auch bei den Combinationen mit Platin und Kohle die Stromstärke nahe constant.

1) Fromme, l. c. p. 330 a. E.

2) Bunsen, Pogg. Ann. 155. p. 230. 1875.

Die E. K. wurde aus diesen grössten, resp. kleinsten Werthen der Stromintensität berechnet. Setzt man die E. K. des Grove'schen oder Bunsen'schen Elementes, wenn es Salpetersäure enthält, gleich 100, so war die E. K. des mit Chromsäurelösung gefüllten Elementes gleich 70, resp. 104, und die des Kupfer-Chromsäureelements gleich 62.

Demnach nimmt die E. K. des Bunsen'schen Elements um 4 Proc. zu, die des Grove'schen aber um 30 Proc. ab, wenn man die Salpetersäure vom spec. Gew. 1,4 durch Chromsäure ersetzt. Poggendorff hatte eine Abnahme von 38 Proc. beim Grove'schen Element gefunden, seine Chromsäurelösung war aber von etwas anderer Zusammensetzung.

Wurden dagegen die genannten Combinationen in stromlosem Zustande mit dem Electrometer verglichen, so nahm die E. K. des Grove'schen Elements nur um  $2\frac{1}{2}$  Proc. ab, wenn an Stelle der Salpetersäure vom spec. Gew. 1,4 Chromsäure trat, während beim Bunsen'schen Element wieder eine Zunahme von 4 Proc. beobachtet wurde. Spätere Versuche haben mir auch beim Grove'schen Element eine kleine Zunahme ergeben, sodass ich vermthe, dass die bei den ersten Beobachtungen erhaltene kleine Abnahme aus nicht genügend reiner Beschaffenheit der Platinoberfläche (cf. § 7) entsprang.<sup>1)</sup>

Es wird also entgegen Poggendorff's Ansicht die gegenseitige Stellung von Platin und Kohle in der Spannungsreihe jedenfalls nur unbedeutend geändert, wenn man dieselben aus Salpetersäure in Chromsäure bringt, und folglich kann die Thatsache, dass die E. K. des durch einen kleinen Widerstand geschlossenen Platin-Chromsäureelements nur etwas mehr als  $\frac{2}{3}$  von der des Kohle-Chromsäureelements beträgt, nur durch electrolytische Processe am Platin ihre Erklärung finden.

1) Ich will noch erwähnen, dass ich auch einige Messungen der E. K. des Platins in Mischungen von Chromsäure und Salpetersäure anstellte. Dieselben ergaben, dass bei Zusatz geringer Mengen von Chromsäurelösung zur Salpetersäure die E. K. des Grove'schen Elements zuerst um 3 Proc. stieg und bei weiterem Zusatz wieder abnahm. Diese Messungen geschahen bei stromlosem Element mit dem Electrometer.

Eine weitere Untersuchung wird nun zunächst die folgenden beiden Fragen beantworten müssen:

Wenn es, wie eben bewiesen, secundäre Processe sind, die das abnorme Verhalten des Platins in Chromsäure veranlassen, und wenn, wie Buff vermuthete, die Ursache desselben in der kleinen Oberfläche eines Platinblechs liegt, so müsste bei gehöriger Vergrößerung der Oberfläche oder überhaupt bei Verminderung der Stromdichte das geschlossene Element eine der des ungeschlossenen gleiche E. K. zeigen und einen constanten Strom liefern.

Zweitens ist zu muthmassen, dass die oben beschriebenen Beobachtungen die Erscheinung noch nicht in ihrem ganzen Umfange wiedergeben. Denn wenn es gestattet ist, von einer Widerstandsänderung des Elements während der Dauer der Stromschliessung abzusehen und also in der beobachteten Zunahme der Stromintensität eine Zunahme der E. K. zu erblicken, so muss nothwendig, da die E. K. des geschlossenen Elements kleiner als die des geöffneten gefunden wurde, der beobachteten Zunahme eine diese an Grösse übertreffende Abnahme vorhergegangen sein.

Bei den folgenden Beobachtungen diente zur Messung der E. K. entweder und meist ein Wiedemann'sches Galvanometer oder ein Kirchhoff'sches Electrometer. Vom Galvanometer war der astasirende Magnet entfernt. Bei grossem Rheostatenwiderstande durchlief der Strom eine Windungsreihe einer Spirale mit feinem Draht, bei kleinem eine Windungsreihe einer Spirale mit dickem Draht. Die Spiralen sind bezeichnet als Gr.(osse) Sp.(irale) und Kl.(eine) Sp.(irale). Der Abstand der Scala vom Spiegel betrug 1830 Scalentheile; die Entfernung der Spirale vom Magnetspiegel wurde jedesmal so gewählt, dass ein geeigneter, innerhalb einer längeren Versuchsreihe, in welcher der Rheostatenwiderstand wechselte, nahe gleicher Ausschlag auf der Scala entstand.

Bei den meisten Versuchen befand sich die Chromsäure in einem kleinen Thoncylinder, welcher umgeben von einem kleinen amalgamirten Zinkcylinder in einem Glas mit verdünnter Schwefelsäure stand. Die Ablenkungen durch das Chromsäureelement (C) wurden mit denen verglichen, welche

ein ihm sonst gleiches, nur concentrirte Salpetersäure an Stelle der Chromsäure enthaltendes Element (S) gab. Dieses lieferte bei grösseren Schliessungswiderständen einen durchaus constanten Strom. Das Platin dieses Vergleichselements besass Blechform und eine grosse Oberfläche, während das Platin des Chromsäureelements meist Drahtform hatte, weil es sich dann leicht in der Alkoholflamme glühen liess. Es wurde nämlich das Glühen als das beste und einfachste Mittel befunden, um das Platin von den Wirkungen vorhergegangener Versuche zu befreien und in einen immer gleichen Zustand zu versetzen. Wo nichts anderes bemerkt, ist das Platin vor jeder Versuchsreihe und vor jeder Aenderung des Widerstands geglüht worden.

Während der Beobachtung mit einem bestimmten Rheostatenwiderstand blieb, wenn nichts Gegentheiliges angegeben, der Strom fortwährend geschlossen, und befand sich jeder Theil des Elements in vollkommener Ruhe.

Die Tabellen geben die Ablenkungen des Galvanometers in Scalentheilen zu der vorgesetzten Zeit an, welche vom Moment der Schliessung des Stromes an gezählt ist. Die erste, der Zeitangabe ermangelnde Zahl bezieht sich auf den nach etwa 1 Sec. erfolgenden ersten Ausschlag des Galvanometers. Die Schwingungen des Galvanometerspiegels beruhigten sich innerhalb 10 Sekunden.

2. Aenderung der electromotorischen Kraft mit der Dauer der Stromschliessung und mit der Stromdichte.

Die Tab. 1 und 2 zeigen die Aenderung der E. K. während der Dauer der Stromschliessung.

Tab. 1. Platindraht von 0,9 mm Dicke und 350 mm Länge, zu einer Spirale aufgewickelt.

$W = 23000$  S.-E. Gr. Sp.

		sec		sec		sec	
S.	496,0	50	358,1	160	338,0	600	321,5
10 sec	380,5	60	355,8	180	335,3	800	321,2
		70	353,6	200	333,0	1000	320,4
C.	489,5	80	351,6	240	329,5	1200	319,8
10 sec	369,3	90	349,7	280	327,1	1400	320,0
20	366,0	100	347,8	320	325,5		
30	363,2	120	344,2	360	324,4		
40	360,6	140	340,9	400	323,5		

<i>W</i> = 1400 S.-E. Gr. Sp.					<i>W</i> = 400 S.-E. Kl. Sp.						
<i>S.</i>	501,9	sec 50	305,1	sec 130	303,4	<i>S.</i>	493,0	sec 20	264,5	sec 80	286,5
10 sec	383,4	60	301,8	140	304,4	10 sec	379,0	30	271,5	90	287,8
		70	299,9	150	305,1			40	276,7	100	288,9
<i>C.</i>	484,9	80	299,4	160	305,6	<i>C.</i>	452,0	50	280,2	110	289,9
10 sec	343,9	90	299,5	170	305,9	10 sec	266,5	60	282,9	120	290,5
20	327,4	100	300,0	180	306,1	15	262,0	70	285,0		
30	317,7	110	300,9	190	306,3						
40	310,4	120	302,1	200	306,4						

Tab. 2. Platindraht von 0,5 mm Dicke und 35 mm Länge.

<i>W</i> = 19000 S.-E. Gr. Sp.									
<i>S.</i>	484,2	sec 20	263,2	sec 70	226,2	sec 120	245,7		
10 sec	370,4	30	251,4	80	224,7	140	256,0		
		40	242,0	90	225,0	160	257,1		
<i>C.</i>	457,2	50	235,2	100	230,7				
10 sec	285,2	60	229,9	110	238,0				

<i>W</i> = 500 S.-E. Kl. Sp.						<i>W</i> = 400 S.-E. Kl. Sp.					
<i>S.</i>	479,0	sec 50	173,1	sec 130	231,3	<i>S.</i>	491,0	sec 40	173,0	sec 130	242,2
10 sec	364,7	60	173,9	140	234,3	10 sec	373,5	60	174,0	140	243,5
		70	174,5	150	237,7	<i>C.</i>	287,0	80	176,1	160	251,2
<i>C.</i>	312,0	80	175,8	160	241,0	10	172,0	100	179,0	180	257,7
10 sec	179,5	90	177,8	170	244,2	20	171,8	110	181,6	200	259,1
20	172,5	100	182,0	180	248,0	30	172,2	120	187,5		
30	172,4	110	231,0	200	253,8						
40	172,8	120	228,7	200	256,0						

Die Tab. 3, 4 und 5 veranschaulichen den Einfluss, welchen die Grösse des Schliessungswiderstandes, oder, da während aller zu der gleichen Tabelle gehörenden Beobachtungen die in die Chromsäure eintauchende Platinoberfläche die gleiche blieb, die Stromdichte auf Grösse und Verlauf der E. K. ausübt.

Tab. 3. Platinspirale der Tab. 1.

Spirale		Grosse							Kleine	
<i>W</i>		23000	15000	8000	3000	1400	700	260	800	400
<i>S.</i>	Erster Aus- schlag <i>a</i>	495	494	489	492	502	499	496	494	493
	Ablenkung <i>b</i>	379	377	373	376	383	381	378	377	379



Spirale		Grosse							Kleine	
C.	Erster Aus- schlag $c$ {	489	491	484	480	485	480	474	464	452
	Minimum $d$	321	323	320	302	299	292	287	272	262
	Zeit des Mini- mums sec {	1200	700	420	540	80	70	60	25	15
	Maximum $e$	328	328	325	318	320	321	317	310	302
	$b/e$	1,15	1,15	1,15	1,18	1,20	1,19	1,19	1,22	1,25
	$b - d/e - d$	—	—	—	—	4,00	3,07	3,03	2,87	2,92

Tab. 4. Ein Drittel der Platinspirale von Tab. 3.

Spirale		Grosse					Kleine			
S.	$W$	14800	8000	5000	2000	1000	750	400	150	80
	Erster Aus- schlag $a$ {	495	492	492	490	491	489	497	495	508
	Ablenkung $b$	379	377	376	374	375	374	381	380	390
C.	Erster Aus- schlag $c$ {	482	480	474	462	458	445	414	356	328
	Minimum $d$	279	272	269	261	260	246	234	204	197
	Zeit des Mini- mums sec {	240	100	80	40	30	10	0-10	0-10	0-10
	Maximum $e$	285	282	278	284	284	289	292	287	288
	$b/e$	1,33	1,34	1,35	1,32	1,32	1,29	1,30	1,32	1,35
	$b - d/e - d$	—	—	12,00	5,00	4,80	3,00	2,53	2,12	2,12

Tab. 5. Platindraht der Tab. 2.

Spirale		Grosse					Kleine		
S.	$W$	19000	10000	5000	2000	1000	800	400	140
	Erster Aus- schlag $a$ {	483	501	502	501	491	479	491	506
	Ablenkung $b$	370	385	384	382	374	365	373	388
C.	Erster Aus- schlag $c$ {	461	471	445	406	372	311	287	253
	Minimum $d$	222	215	214	193	187	172	171	173

Spirale	Grosse					Kleine		
Zeit des Minimums sec	85	90	45	75	45	30	20	10
Maximum $e$	269	279	278	273	269	264	265	275
$b/e$	1,37	1,38	1,38	1,40	1,39	1,38	1,40	1,41
$b - d/e - d$	3,15	2,66	2,66	2,36	2,28	2,10	2,10	2,11

Folgendes sind die Resultate dieser Beobachtungen: Zunächst bestätigt sich der aus den Beobachtungen des § 1 mit grosser Wahrscheinlichkeit gezogene Schluss, dass die E. K. der Combination Zink-Schwefelsäure-Chromsäure-Platin vom Augenblick der Stromschliessung an ab- und nach Erreichung eines Minimums zunimmt, ohne indess den Ausgangswerth wieder zu erreichen. Als Ausgangswerth, d. h. als E. K. des ungeschlossenen Elements können wir aber mit sehr grosser Annäherung die constante E. K. des Salpetersäureelements ansehen, wie eine graphische Darstellung, z. B. der in Tab. 1 mit  $W = 23000$  erhaltenen Resultate zeigt. Bei keiner Stromdichte bleibt die E. K. des Chromsäureelements constant, auch nicht bei den kleinstmöglichen, bei welchen die Oberfläche des Platins etwa 1000 qmm und der Widerstand im Rheostaten 23000 S.-E. betrug. Demnach ist auch die von Buff gegebene Erklärung zu verwerfen, nach welcher die Inconstanz des Stromes (der E. K.) nur eine Folge kleiner Platinoberfläche, also grosser Stromdichte sein sollte. Die vorliegenden Beobachtungen zeigen vielmehr, dass die Inconstanz der Combination erst mit gegen die Null convergirender Stromdichte völlig verschwindet.

Bei sehr kleiner Stromdichtigkeit nimmt die E. K. ausserordentlich langsam, aber sehr regelmässig verzögert, bis zu einem Minimum ab und bleibt dann auf diesem stehen. Mit wachsender Stromdichte nimmt das Minimum an Tiefe zu — bis zu 55 Proc. von der E. K. des ungeschlossenen Elements — und wird schneller erreicht, zugleich nimmt aber auch die E. K. nach erreichtem Minimum wieder zu, und zwar so, dass die Grösse der Zunahme wächst, der erreichte Endwerth aber abnimmt. Es nimmt also das Verhältniss der Abnahme zur Zunahme  $b - d/e - d$  ab, bis es schliesslich einen

constanten Werth 2,1 erreicht. Bei grösseren Stromdichten nimmt die E. K. um etwa doppelt soviel ab, als sie nachher wieder zunimmt. Der erreichte Maximalwerth aber steht zu der E. K. des ungeschlossenen Elements bei den kleinsten Stromdichten im Verhältniss 1:1,15 und bei den grössten im Verhältniss 1:1,4. Das letztere entspricht dem auch im § 1 erhaltenen Resultat. Bei grösserer Stromdichte ist die Zunahme während kurzer Zeit eine so starke, dass der Spiegel des Galvanometers in Schwingungen geräth. Dann wurde häufig beobachtet (Tab. 2  $W = 800$ ), dass nach der starken Zunahme die E. K. erst wieder einige Zeit abnahm. Es wiederholte sich dann der bisherige Verlauf der E. K. noch einmal in kleinerem Maassstabe, indem nach baldiger Erreichung eines Minimums die E. K. wieder erst beschleunigt, dann verzögert zunahm.

Wenn man das Verhältniss  $c/e$  des ersten Ausschlags des Galvanometers zu dem nach längerer Zeit eintretenden Maximum bildet, so findet man dasselbe bei den kleinsten Stromdichten constant, bei grösseren bis zu einem Maximum zu- und bei den grössten wieder abnehmend. Demnach vermindert sich die E. K. bei den kleinsten Stromdichten innerhalb der ersten Secunde in demselben Verhältniss, in welchem ihr Endwerth abnimmt; bei wachsender Stromdichte nimmt sie dann weniger und später bedeutend stärker als ihr Endwerth ab, welcher letzterer sehr bald nahe unabhängig von der Stromdichte wird.

Dass das Salpetersäureelement eine sehr constante und von der Stromdichte innerhalb der hier eingehaltenen Grenzen unabhängige E. K. besass, geht daraus hervor, dass das Verhältniss  $a/b$  des ersten Ausschlags zu der constanten Ablenkung überall das gleiche war. Die Mittelwerthe in den drei Tabellen 3 bis 5 sind resp. 1,309, 1,307, 1,308.

Bei den vorstehend beschriebenen Messungen war der Schliessungswiderstand immer so gross gegen den Widerstand des Elements, dass die beobachtete Stromintensität direct als Maass der E. K. betrachtet werden konnte.

Beobachtet man bei grossen Stromdichten, entweder in-

dem man den Rheostatenwiderstand noch weiter, als oben geschehen, vermindert, oder — wodurch ebenfalls das Verhältniss des Schliessungswiderstands zu dem inneren Widerstand des Elements abnimmt — indem man die Platinoberfläche noch mehr verkleinert, so wird man zwar nicht mehr für die Stromintensität ohne weiteres die E. K. setzen dürfen, aber man wird doch unter der Voraussetzung nicht gar zu kleiner Rheostatenwiderstände aus dem Verlaufe der Stromintensität noch eine ungefähre Vorstellung von dem der E. K. gewinnen.

Das Resultat solcher Beobachtungen war, dass die E. K. sehr schnell bis zu einem sehr kleinen Werthe abnahm, ohne sich von demselben wieder zu erheben. Die Periode der Zunahme fällt also bei grosser Stromdichte — ebenso wie bei sehr kleiner — ganz aus, und der Endwerth der E. K. beträgt noch weniger als  $\frac{7}{10}$  von der des Grove'schen Elements.

### 3. Einfluss einer Erschütterung des Platins auf die electro-motorische Kraft.

Die Wirkung, welche eine Erschütterung des Platins auf die E. K. ausübt, hängt von der Stromdichtigkeit ab.

Am bedeutendsten wirkt dieselbe in dem Falle so grosser Stromdichtigkeit, dass die Periode der Zunahme ganz ausfällt (§ 2 a. E.), eine Erschütterung des Platins erhebt die E. K. dann leicht auf das Dreifache ihres Minimalwerthes, auf welchen sie mit aufhörender Bewegung aber sehr bald zurückgeht.

Dagegen ist die Erschütterungswirkung bei mittleren und kleinen Stromdichten eine verhältnissmässig geringe.

Sie besteht auch hier im ersten Augenblick wieder in einer Zunahme der E. K., welche bei kleinen Stromdichten sehr allmählich wieder verschwindet, bei mittleren aber sofort in eine der Zunahme an Grösse nachstehende Abnahme übergeht, die langsam ersetzt wird.

Um einen Begriff von der Grösse dieser Aenderungen zu geben, sei angeführt, dass, als in Tab. 1  $W = 1400$  die E. K. nach 200 Sec. bis auf 306,4 gesunken war, starke Erschütterung der Platinspirale die Ablenkung auf 310,9, also

um 1,4 Proc. erhob. Mit dem Aufhören der Bewegung trat ein sehr langsamer Rückgang ein.

Dagegen bewirkte eine ganz kurze Erschütterung des Platindrahtes in Tab. 2, als bei  $W = 800$  nach 300 Sec. die E. K. den Werth 256,0 erreicht hatte, eine momentane Zunahme der E. K. auf 275, d. h. um 7,4 Proc. Unmittelbar darauf aber zeigte das Galvanometer eine Abnahme der E. K. auf 245, d. h. um 4,2 Proc. an. Sehr langsam stieg dann die E. K. wieder.

Die Beobachtungen über die Erschütterungswirkung wurden aus naheliegenden Gründen meist zu einer Zeit angestellt, zu welcher die E. K. bereits nahe constant geworden war. Doch habe ich mich überzeugt, dass der Erfolg derselbe ist, wenn man während der Periode der Ab- oder Zunahme beobachtet, was wegen der bei grösseren Stromdichten sehr raschen Aenderung der E. K. freilich nur bei kleineren Stromdichtigkeiten ausführbar ist.

Noch bemerke ich, dass die Erschütterung immer nur sehr gering zu sein braucht, um die beschriebene, mit grosser Regelmässigkeit eintretende Wirkung hervorzubringen, so gering, dass schon ein in einiger Entfernung fahrender Wagen oder eine leise Bewegung des Beobachters genügend ist.

Man vergleiche aber in Betreff der Empfindlichkeit der E. K. gegen Erschütterung des Platins auch das unter § 4a. Mitgetheilte.

4. Einfluss einer grösseren Stromdichtigkeit auf die electromotorische Kraft bei einer nachfolgenden kleineren, oder umgekehrt.

a) Die vorhergehende Stromdichte besass den Maximalwerth, d. h. der äussere Widerstand war  $W = 0$ . Tab. 6. Die folgenden Zahlen schliessen sich an Tab. 1  $W = 23000$  an. Nachdem die E. K. in 1400 Sec. bis auf 320 gefallen war und sich kaum mehr änderte, wurde das Element für einen Augenblick ohne Widerstand geschlossen. Dann wurde sofort wieder die Schliessung durch  $W = 23000$  und das Galvanometer hergestellt und folgende Werthe der E. K. beobachtet, wobei die Zeiten von dem Moment der Wiedereinschaltung von  $W = 23000$  gezählt sind:

Sec.	10	20	30	40	50	60	80	100
E. K.	344,2	343,3	341,7	340,5	339,5	338,5	336,5	335,2
Sec.	120	140	160	180.				
E. K.	334,0	333,0	332,3	331,5				

Tab. 7. Die Zahlen dieser Tabelle schliessen sich an Tab. 1  $W = 400$  an. Die E. K. war nach 120 Sec. auf 290,5 gekommen und nahezu constant geworden. Als dann das Element 10 Sec. lang mit  $W = 0$  geschlossen worden war, nahm die E. K. bei dem sofort wieder eingeschalteten Widerstande  $W = 400$  folgende Werthe an:

Sec.	10	20	30	40	50	60	80
E. K.	314,0	315,2	314,5	313,8	313,0	312,2	311,0
Sec.	100	150	200.				
E. K.	309,8	307,5	306,2.				

Tab. 8. Ein Platindraht gab bei  $W = 10000$ . Gr. Sp. einen ersten Ausschlag von 462, und die E. K. fiel von 270,0 bei 10 Sec. bis auf 197,7 bei 200 Sec. und wuchs bis auf 259,0 bei 420 Sec. Hier war sie fast vollkommen constant.

Wurde dann der Platindraht geglüht, das Element 5 Sec. lang mit  $W = 0$  geschlossen und darauf  $W = 10000$  eingeschaltet, so war nach 10 Sec. die E. K. = 340,0, von welchem Werthe sie in längerer Zeit bis auf 296 fiel. Einige hierher gehörige Beobachtungen sind noch unter b) angeführt.

Aus einer grossen Zahl derartiger Beobachtungen lässt sich folgendes Gesetz ableiten:

Wenn man, nachdem die E. K. bei einem gewissen Widerstande nahezu constant geworden ist, vorübergehend mit  $W = 0$  schliesst, so wächst die E. K. von einem gewissen Anfangswerthe an — dessen Grösse nicht auszumitteln ist, der aber jedenfalls dem vorher erreichten Werthe nachstehen muss — sehr rasch bis zu einem Maximum, von welchem sie nur langsam absinkt. Das Maximum liegt viel höher als der vorher erreichte Werth, ebenso übertrifft diesen aber auch der nach längerer Zeit eintretende Endwerth.

Die Wirkung der geschilderten Operation besteht demnach, wenn man sie nach Erreichung eines nahe constanten

Werths der E. K. anwendet, darin, dass sie dieselbe vorübergehend sowohl als dauernd vergrössert.

Wendet man sie aber an, bevor die E. K. nahe constant geworden ist, so kann sie auch eine Abnahme derselben zur Folge haben.

Dies tritt z. B. in Tab. 1  $W = 23000$  ein, wenn mit  $W = 0$  in den ersten 90 Sec. geschlossen wird. In diesem Falle besteht die Wirkung also darin, dass der Process der Abnahme der E. K. vorübergehend beschleunigt ist.

Noch in anderer Beziehung erscheint die Wirkung einer Schliessung des Elements ohne Widerstand interessant:

Sie beseitigt vollkommen die nach § 3 immer vorhandene Empfindlichkeit der E. K. gegen Erschütterung des Platins.

Dieser Umstand veranlasste mich, als constanten Endwerth der E. K. bei dem jeweiligen Rheostatenwiderstande denjenigen zu betrachten, welcher einige Zeit nach einer kurzen Schliessung des Elements mit  $W = 0$  sich ergab, und welcher, wie oben ausgeführt, den ohnedies erreichbaren immer übertraf.

b) Die kleinere Stromdichtigkeit hat den Werth Null (Element geöffnet). Die ersten hierauf sich beziehenden Versuche habe ich mit dem Galvanometer angestellt, später aber die erhaltenen Resultate auf electrometrischem Wege nochmals geprüft.

Da namentlich die eine Frage, nämlich wie sich die E. K. des vorher geschlossenen Elements während einer Unterbrechung des Stromes verhält, mit dem Electrometer sich viel leichter beantworten lässt — weil bei Benutzung des Galvanometers durch die Schliessung des Stromes selbst bei Einschaltung eines sehr grossen Widerstands sofort wieder neue Aenderungen der E. K. eintreten —, so stelle ich die electrostatischen Messungen voran.

Von den beiden Polen des Elements wurde der eine mit dem einen Quadrantenpaar eines Kirchhoffschen Electrometers, der andere mit dem zweiten Quadrantenpaar und der Erde verbunden. Die beiden Pole waren im übrigen entweder isolirt oder durch einen Widerstand von einigen Tausend

S.-E. geschlossen. Schliessung und Oeffnung des Stromes erfolgte vom Fernrohr aus.

Durch Anwendung eines Daniell'schen statt des Chromsäureelements wurde zunächst festgestellt, dass, wenn, wie es beim Daniell der Fall ist, die E. K. durch Schliessung des Elements sich nicht ändert, auch die Ablenkung des Electrometers fast genau die gleiche bei isolirten und bei verbundenen Polen war.

Wegen des grossen Schliessungswiderstands dürfen wir also auch die bei geschlossenem Element beobachteten Ablenkungen des Electrometers der E. K. gleich setzen. Wenn auch Ablenkung und E. K. überhaupt nicht genau einander proportional waren, so habe ich doch von einer Reduction hier abgesehen. Das Element war, wenn nichts anderes bemerkt, während der ganzen Dauer der Oeffnung oder Schliessung vor Erschütterung geschützt.

Die angegebenen Zeiten sind von dem Moment der Schliessung, resp. Oeffnung des Elements an gezählt.

Tab. 9.

Pole isolirt: E. K. = 107,7. Pole verbunden: ( $W = 4500$ ).

Sec.	5	10	15	20	25	30	40	50	60	70
E. K.	71,2	53,8	52,0	50,3	49,1	48,2	47,1	46,9	49,2	55,4
Sec.	90	120	180	240.						
E. K.	57,4	60,6	65,1	66,3.						

Pole isolirt:

Sec.	5	10	15	20	25	30	40	50	60	80	120
E. K.	76,4	81,2	83,1	84,4	85,5	86,3	87,8	89,0	89,8	91,1	93,2

Pole wieder verbunden:

Sec.	5	10	15	20	30	40.
E. K.	68,2	61,0	63,6	64,2	65,1	65,2.

Tab. 10. Pole isolirt: E. K. = 95,5.

Pole verbunden: ( $W = 9000$ ). E. K. fällt bis 52,5 und steigt darauf bis 60,5, wo sie fast constant war. Darauf wurden die Pole 20 Sec. lang durch  $W = 0$  verbunden. Nachdem sofort wieder  $W = 9000$  eingeschaltet war, ergab sich:

Sec.	5	10		15	20	40	80	150	300
E. K.	75,5	78,0	(noch zunehmend)	74,8	74,6	73,8	72,8	72,0	71,4



Die Resultate der folgenden beiden Tabellen sind mit dem Galvanometer gewonnen.

Tab. 11. Platinblech.  $W = 2000$  S.-E. Gr. Sp.

Erster Ausschlag: 438,4. 10<sup>sec</sup> 319,7.

Die E. K. nahm dann während 800 Sec. bis auf 225 ab und stieg in weiteren 1200 Sec. wieder auf 238,4. Die Grösse der Abnahme überwiegt also bedeutend über die der Zunahme. Es wurde nun, kurz bevor die E. K. ihren kleinsten Werth erreichte, das Element verschieden lange Zeit geöffnet.

In der folgenden Tabelle stehen unter der Zeitdauer der Oeffnung die Werthe, welche die E. K. nach Wiederschliessung des Stromes zu den vorgesetzten Zeiten besitzt.

	O e f f n u n g s d a u e r				
	11 sec	20 sec	40 sec	80 sec	220 sec
Erster Ausschlag	340,0	352,0	371,0	384,0	394,0
Nach 10 sec	234,8	237,0	240,5	252,0	269,0
" 20	232,1	234,8	235,0	242,5	255,2
" 40	230,7	231,3	232,6	235,1	243,0
" 70	230,1	230,2	230,8	230,5	235,6
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Tab. 12. Einfacher Platindraht.  $W = 200$ . Kl. Sp.

Die Oeffnung geschah, nachdem die E. K. nahe constant geworden war. Die folgende Tabelle ist ebenso wie die vorhergehende zu verstehen, sie enthält noch den Verlauf der E. K. bei geglühtem Platindraht.

	Geglüht	O e f f n u n g s d a u e r				
		10 sec	20 sec	30 sec	60 sec	120 sec
Erster Ausschlag	276,0	563,0	545,0	515,0	505,0	444,0
Nach 10 sec	257,5	419,4	413,7	403,0	401,5	393,0
" 20	289,0	415,9	413,7	405,9	406,7	402,5
" 30	383,0	413,1	413,7	—	409,1	405,2
" 40	399,0	412,1	413,4	406,7	410,2	406,4
" 60	407,0	413,0	412,5	407,2	411,5	407,8
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	414,0	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Die Tab. 9 bis 12 geben nun folgende Resultate:

Tab. 9 und 10 bestätigen einmal (durch electrostatische Messungen) die früher gefundenen Sätze, dass die E. K. bei

frisch geglühtem Platin zuerst ab-, dann zunimmt, ferner (Tab. 10), dass nach vorübergehender Schliessung mit dem kleinsten Widerstande ( $W = 0$ ) die E. K. bis zu einem Maximum wächst und dann wieder abnimmt, aber dauernd grösser als vorher bleibt.

Sodann zeigen sie, dass nach Oeffnung des Elements die E. K. zuerst sehr schnell, bald aber langsam wächst. Von der durch den Strom herbeigeführten Abnahme der E. K. verschwindet ein Viertel in 5 Sec., das zweite in 35 Sec., das dritte noch nicht in 80 Sec. Schliesst man das Element von neuem, so ist also im Augenblick des Stromschlusses die E. K. um so grösser, je länger geöffnet gewesen war, wie dies auch Tab. 11 veranschaulicht. Es sinkt aber dann die E. K. wieder bis zu einem Minimum (Tab. 9), obwohl nicht bis zu einem so tiefen, wie bei der Stromschliessung mit geglühtem Platin, um darauf zuzunehmen.

Je länger der Strom geöffnet worden war, desto tiefer liegt das Minimum, desto rascher ändert sich aber auch die E. K. (Tab. 11). Da ferner diese Aenderungen um so rascher verlaufen, je grösser die Stromdichte ist, so zeigt uns Tab. 12, bei welcher die Stromdichtigkeit bedeutend grösser als in Tab. 11 ist, das scheinbar dem der Tab. 9 widersprechende Resultat, dass die aus den ersten Ausschlägen sowohl als aus den Ablenkungen hervorgehenden electromotorischen Kräfte mit wachsender Dauer der Stromöffnung abnehmen.

Im Anschluss hieran sei noch bemerkt:

1) Dass auf die Zunahme der E. K. während der Oeffnung des Elements eine Erschütterung des Platins von keinem Einfluss ist.

2) Dass wenn durch kurze Schliessung des Elements ohne Widerstand ein constanter und durch Erschütterung des Platins nicht zu ändernder Werth der E. K. erreicht war, nach einer Oeffnung des Elements die Variationen der E. K. in viel engeren Grenzen, als die obigen Tabellen zeigen, sich bewegten.

c) Untersuchung des allgemeinen Falles. Die folgenden Resultate begreifen die beiden Specialfälle, in denen die Stromdichte den grösstmöglichen und kleinstmöglichen

Werth besass, unter sich. Sie beweisen nämlich, dass wenn einer grösseren Stromdichte unmittelbar (d. h. ohne zwischenliegende Oeffnung des Stromes) eine kleinere folgt, die E. K. bei dieser zuerst zu-, und nach Erreichung eines Maximums abnimmt, und dass, wenn umgekehrt eine grössere einer kleineren folgt, die E. K. zuerst bis zu einem Minimum ab-, und dann zunimmt. Die Periode der Zunahme im ersten und die der Abnahme im zweiten Fall ist aber von sehr kurzer Dauer.

Die Messungen wurden sowohl mit dem Galvanometer als mit dem Electrometer gemacht. Ich gebe nur das Protocoll einer der letzteren. Die Aenderung des Widerstands geschah vom Fernrohr aus durch Ein- oder Ausschaltung einer Nebenleitung, welche einen zweiten Rheostaten enthielt.

Tab. 13. Platindraht.

$$W_1 = 4000 \text{ S.-E.} \quad W_2 = 1000 \text{ S.-E.}$$

Element geöffnet: E. K. = 97,0.

Element geschlossen.

$$W_1 + W_2 = 5000.$$

Sec.	55	65	80	100	120	180	240	420.
E. K.	43,8 (Min.)	47,0	49,6	51,5	53,0	56,9	58,8	60,5.

$$W_2 = 1000.$$

Sec.	6	20	40	80	120	210.
E. K.	46,0 (Min.)	52,0	56,0	59,9	60,8	61,1.

$$W_1 + W_2 = 5000.$$

Sec.	3	10	60	90.
E. K.	63,3 (Max.)	62,0	61,6	61,4.

$$W_2 = 1000.$$

Sec.	6	20	40	60	80.
E. K.	59,2 (Min.)	60,2	60,9	60,7	61,1.

$$W_1 + W_2 = 5000.$$

Sec.	4	20	80
E. K.	65,4 (Max.)	63,6	63,5.

Hiernach wächst das beim Uebergange zu einer grösseren Stromdichte eintretende Minimum der E. K. mit Wiederholung des Versuchs nicht unerheblich. Dasselbe ergab sich auch bei einer zweiten Beobachtungsreihe. Dieses Wachsen des Minimalwerths bei Wiederholung des Versuchs ist schon

früher bemerkt worden für den Specialfall, dass die Stromdichte von Null auf einen endlichen Werth gebracht wird.

5. Oscillirendes Ansteigen der electromotorischen Kraft.

Bei mittelgrosser Stromdichte wurde häufig beobachtet, dass, wenn in der Periode der Zunahme die E. K. plötzlich (cf. Tab. 2  $W = 400$ .  $t = 120-130$  Sec.) bedeutend gewachsen war, sich Oscillationen des Magnetspiegels einstellten. Dieselben verliefen in der Weise, dass die Ablenkung mit steigender Geschwindigkeit wuchs und nach Erreichung eines grössten Werthes plötzlich auf den Anfangspunkt ihrer Bewegung zurückging, worauf sie wieder beschleunigt zunahm u. s. w. Die Breite einer Oscillation betrug bis zu 14 Proc. der mittleren Ablenkung, ihre Dauer bis zu 40 Sec.

Sie verschwanden manchmal von selbst wieder, indem ihre Amplitude abnahm, und zugleich ihr Mittelpunkt nach zunehmender Ablenkung sich bewegte, manchmal aber hielten sie minutenlang an. Ich brachte sie dann häufig durch anhaltendes Klopfen des Platins zum Verschwinden, am sichersten aber durch eine vorübergehende Schliessung des Elements ohne äusseren Widerstand. Sowie hierdurch die Empfindlichkeit gegen Erschütterung beseitigt wurde (§ 4a. a. E.), so verschwand auch die Neigung zu Oscillationen.

Aus diesem Grunde sollte man glauben, dass das Eintreten von Oscillationen der E. K. an das gleichzeitige Vorhandensein kleiner Erschütterungen geknüpft sei. Ich möchte aber dennoch an der Ansicht festhalten, dass den Oscillationen eine selbständige Existenz zukommt, einmal deshalb, weil sie auch eintraten, wenn ich das Platin vor Erschütterungen gesichert hatte, sodann weil sie mit einer ausserordentlichen Regelmässigkeit verliefen und sich wiederholten.

Warum sie aber manchmal eintraten, manchmal nicht, habe ich nicht feststellen können.

6. Einfluss der Temperatur des Platins oder der Chromsäure.

Ohne Versuche anzuführen, sei nur bemerkt, dass das Resultat derselben negativ war: Die E. K. änderte sich von dem Augenblicke der Schliessung des Elements an in der

gleichen Weise, mochten Platin und Säure Zimmertemperatur haben, oder der Strom mit glühendem Platin geschlossen oder die Säure auf 40° C. erwärmt worden sein.

7. Aenderungen der Masse oder der Oberfläche des Platins während und infolge des Stromdurchganges, und Mittel, dieselben wieder zu beseitigen.

Wägungen des Platins vor Stromschluss und nachdem der Strom einige Minuten geschlossen gewesen war, liessen keinen Unterschied des Gewichts erkennen.

Ebenso liess eine aufmerksame Beobachtung des Platins (Draht) während der Schliessung des Elements keine Erscheinung an seiner Oberfläche wahrnehmen, falls nicht der Strom zu dicht war. Bei sehr dichtem Strom entwickelte sich Gas.

Verkleinerte man successive den Rheostatenwiderstand — das Platin wurde vor Aenderung des Widerstands jedesmal geglüht —, so trat bei einem gewissen Widerstande einige Secunden nach Schliessung des Stromes Gas auf, dann dauerte die Gasentwicklung beliebig lange, d. h. bis zur Unterbrechung des Stromes fort.

Nahm man den Widerstand noch kleiner, so begann die Gasentwicklung schon im Augenblick der Schliessung des Stromes.

In Wirklichkeit muss aber während des Stromdurchganges die Oberfläche des Platins eine andere werden, auch wenn, wie dies bei den zumeist allein geprüften kleinen und mittleren Stromdichten der Fall ist, eine sichtbare Gasentwicklung nicht stattfindet. Denn dass die Ursache der beschriebenen Erscheinungen nicht in der Säure zu suchen ist, ergibt sich daraus, dass Rühren oder Erneuerung derselben auf den Verlauf der E. K. von keinem Einfluss war.

Dagegen verschwanden die Wirkungen eines Stromdurchganges mehr oder weniger vollständig, und es nahm bei neuer Stromschliessung die E. K. wieder einen ähnlichen Verlauf:

1. wenn das Element einfach eine Zeitlang geöffnet wurde,
2. wenn das Element geöffnet und zugleich das Platin der Luft ausgesetzt wurde,
3. wenn das Platin mit Wasser abgespült,

4. wenn es mit Salpetersäure abgespült,
5. wenn es in der Alkoholflamme geglüht wurde.

Die beiden ersten Verfahren stehen sich völlig gleich: Das Ausheben des Platins aus der Säure in die Luft hat also keinen grösseren Erfolg, als einfache Oeffnung des Stromes. Etwas wirksamer ist 3), noch besser 4) — der Abspülung mit  $\text{HNO}_3$  folgte natürlich immer noch eine solche mit  $\text{H}_2\text{O}$  —, und am sichersten beseitigt man die Spuren früherer Ströme durch das fünfte Verfahren. Dieses wurde, wie früher erwähnt, immer angewandt.

#### 8. Einfluss eines Wasserstoffgehaltes des Platins.

Ein Platindraht wurde zuerst geglüht und dann in verdünnter Schwefelsäure während 18 Stunden electrolytisch mit Wasserstoff beladen. Sofort nach Unterbrechung des polarisirenden Stromes wurde der Draht in das bereit stehende Chromsäureelement gebracht und dieses durch 9000 S.-E. und das Galvanometer geschlossen. Nach 10 Sec. betrug die Ablenkung 342,0, fiel auf 323,0 nach 80 Sec. und stieg nach 240 Sec. auf den nahe constant bleibenden Werth 326,0. Darauf wurde der Draht geglüht und ohne vorhergegangene Wasserstoffentwicklung in die Chromsäure eingesetzt. Die E. K. war dann nach 10 Sec. gleich 248, erreichte nach 120 Sec. ein Minimum von 197,7 und stieg nach 360 Sec. wieder auf 222,8, indem sie weiter noch langsam zunahm. Der wieder geglühte Draht wurde nochmals während nur vier Minuten in Schwefelsäure mit Wasserstoff beladen. In Chromsäure erreichte dann die E. K. einen kleinsten Werth gleich 258 und stieg wieder auf den nahe constanten Werth 275. Wurde jetzt für 10 Sec. der Rheostatenwiderstand von 9000 S.-E. durch Null ersetzt, so erhielt man nach einer Minute eine E. K. von 280. In dieser Weise wurde eine grosse Zahl von Versuchen angestellt, welche das gleiche Resultat lieferten: Wasserstoffgehalt des Platins erhöht das Minimum und das Maximum der E. K. um so mehr, je grösser er ist. Bei vollkommener Sättigung mit Wasserstoff ist der maximale Endwerth der E. K. grösser als nach kurzer Schliessung des Elementes ohne äusseren Widerstand (§ 4<sub>a</sub>).

Ohne Einfluss dagegen auf den Verlauf der E. K. war eine vorgängige electrolytische Entwicklung von Sauerstoff am Platin.

Bei einer anderen Versuchsreihe wurde die E. K. mit dem Electrometer gemessen nach der Methode, welche ich bei einer früheren Untersuchung<sup>1)</sup> benutzt habe, und welche zuerst von Fuchs angegeben ist. Bei dieser wurde auch die E. K. des ungeschlossenen Elementes für wasserstoffhaltiges Platin gemessen. Sie fand sich etwas kleiner als bei reinem Platin, im Mittel 5 $\frac{0}{0}$ . Der Unterschied verschwand langsam.

Eine nur fünf Minuten dauernde Wasserstoffentwicklung (in Schwefelsäure) an einem sehr dünnen Platindrähtchen war von geringerem Einfluss auf den Verlauf der E. K. des Chromsäureelements, als eine halbstündige, welche einer zweistündigen an Wirkung gleich kam. In letzteren Fällen lag das Maximum der E. K. um 18 $\frac{0}{0}$ , 18 $\frac{0}{0}$  und 14 $\frac{0}{0}$  höher als das bei nur geglühtem Draht erreichte, während das Minimum sogar um 40 $\frac{0}{0}$ , 40 $\frac{0}{0}$  und 32 $\frac{0}{0}$  heraufrückte.

## II. Platin in reiner, in Wasser gelöster Chromsäure.<sup>2)</sup>

Die folgenden Resultate sind mit Hülfe des Electrometers gewonnen. Die Methode war die im § 8 des I. Abschnitts angegebene.

Die E. K. des ungeschlossenen Elements war um 2 $\frac{0}{0}$  geringer als die des im I. Abschnitt untersuchten Elements, welches das Platin in Bunsen'scher Chromsäurelösung enthielt. Sie stieg durch Zusatz von Schwefelsäure zu der wässerigen Lösung.

Wurde das Element geschlossen, so nahm die E. K. sofort stark ab, um so mehr, je kleiner der Widerstand der Schliessung war, und erreichte einen kleinsten Werth, welcher mit abnehmendem Rheostatenwiderstand selbst abnahm, und von dem sie sich nur unmerklich wieder erhob. Denn

1) Fromme, Wied. Ann. 12. p. 403. 1881.

2) 1 g wasserfreie Chromsäure auf 5 g Wasser.

die Grösse der Abnahme betrug bei Rheostatenwiderständen von 9000 bis 10 S.-E. 82 bis 100 Sec., die Zunahme aber nur 1 bis 2 Sec. Der bei irgend einem Widerstand nach längerer Zeit eintretende constante Endwerth steht zu dem in der Bunsen'schen Chromsäurelösung erreichten etwa in dem Verhältniss 10:14. Wurde dann der Strom geöffnet, so stieg die E. K. sehr allmählich wieder zu der des ungeschlossenen Elements an, mit der Eigenthümlichkeit, dass sie zu gegebener Zeit einen um so grösseren Werth besass, je kleiner der Widerstand, also auch die E. K. selbst während der Stromschliessung gewesen war.

Sowie aber der Lösung etwas Schwefelsäure zugesetzt wurde, nahm die E. K. den im I. Abschnitt constatirten Verlauf: Sie fiel, sobald das Element geschlossen wurde, auf einen kleinsten Werth und stieg dann wieder an bis zu einem Maximum, welches dem bei Bunsen'scher Lösung beobachteten etwa gleich, also viel grösser, als vorhin war. Das eben erwähnte stärkere Ansteigen der E. K. bei kleineren Widerständen nach Unterbrechung des Stromes trat jetzt nicht ein.

### III. Palladium in Chromsäurelösung.

Das benutzte Palladium hatte Drahtform (Dicke 1 mm) und wurde durch längere electrolytische Entwicklung von Sauerstoff und Abwaschen des gebildeten Oxyds mit verdünnter Salzsäure gereinigt.

Die E. K. des ungeschlossenen Elementes: Zink-Schwefelsäure-Bunsen'sche Chromsäure-Platin nahm um  $3\frac{1}{2}$  Proc. ab, wenn Palladium an Stelle des Platins trat.

Wurde weiter noch die Bunsen'sche Chromsäure durch die im II. Abschnitt angegebene Lösung von reiner Chromsäure in Wasser ersetzt, so sank die E. K. um weitere 2,3 Proc.

Wurde das Palladiumelement geschlossen, so nahm bei jeder der beiden Chromsäurelösungen die E. K. nur wenig ab, indem sie sich einem kleinsten Werthe annäherte, welcher mit abnehmendem Schliessungswiderstande abnahm, jedoch bei beiden Lösungen etwa der gleiche war. Dem-



nach unterscheidet sich das Verhalten des Palladiums in Chromsäure wesentlich von dem des Platins.

Die folgende Tabelle bezieht sich auf zwei Elemente mit Bunsen'scher Lösung. Die in die Flüssigkeit tauchende Oberfläche war beim Palladium etwas kleiner als beim Platin, die Stromdichte also bei gleichem Rheostatenwiderstande etwas grösser beim Palladium. Die Zahlen geben die nach längerem Schluss beobachteten electromotorischen Kräfte in Theilen der Electrometerscala.

<i>W</i>	$\infty$	9000	5000	2000	1000	500	200	100	50	20	10
Pt	65,0	52,1	—	49,3	—	47,5	—	44,3	—	—	—
Pd	62,8	60,4	60,1	59,1	58,5	57,7	56,8	56,0	55,1	53,2	51,0
Pt/Pd	1,035	0,862	—	0,833	—	0,822	—	0,791	—	—	—

Die E. K. eines geschlossenen Palladium-Chromsäureelements ist also unter sonst gleichen Umständen kleiner als die eines geschlossenen Platin-Chromsäureelements, um so mehr, je grösser die Stromdichte ist.

#### IV. Gold in Bunsen'scher Chromsäurelösung.

Die E. K. eines mit Gold in Bunsen'scher Chromsäurelösung zusammengestellten Elements war bei  $W = \infty$  der eines ungeschlossenen Platinelements etwa gleich. Wird das Element aber geschlossen, so bleibt die E. K. des Goldelements constant bei grossem Schliessungswiderstand und nimmt etwas ab, wenn derselbe klein ist, sodass sie die des Platinelements dann nicht unbedeutend übersteigt. Niemals zeigt Gold in Bunsen'scher Chromsäure den bei dem Platin gefundenen eigenthümlichen Verlauf der E. K.

#### V. Gaskohle in Bunsen'scher Chromsäurelösung.

Obwohl schon bei den ersten Versuchen (I, § 1) Gaskohle ein entschieden anderes Verhalten als Platin gezeigt hatte, so glaubte ich doch, die bei der Untersuchung des Platins gemachten Erfahrungen bei einer neuen ausgedehnten Untersuchung der Kohle verwerthen zu sollen. Es wurde deshalb nun die Kohle bei den verschiedensten Stromdichten geprüft. Zur Messung diente das Galvanometer.

Die E. K. erwies sich bei kleiner Stromdichte als vollkommen constant, bei grösserer nahm sie bis zu einem kleinsten Werthe ab, von dem sie sich nicht wieder erhob. Bei sehr grosser Dichte und lebhafter Gasentwicklung schwankte wohl die E. K. etwas um den kleinsten Werth, indem sie abwechselnd ab- und zunahm; diese Schwankungen trugen aber den Stempel der Regellosigkeit.

Durch Oeffnen des Stromes oder Bewegen der Kohle wird die E. K., falls sie vorher abgenommen hatte, erheblich gesteigert. Wird der Strom wieder geschlossen oder mit Bewegung der Kohle aufgehört, so nimmt die E. K. mit grösserer Geschwindigkeit als vorher ab.

Wurde die Oberfläche der Kohle durch Tränkung derselben mit Wachs verkleinert, so war die E. K. *cet. par.* kleiner als vorher, in dem Verlaufe der E. K. änderte sich aber sonst nichts. Sie nahm bis zu einem tiefer liegenden Minimum ab, blieb aber auf demselben stehen.

Wenn demnach Buff<sup>1)</sup> von einem mit Wachs getränkten Kohlencylinder sagt: . . . „sein Verhalten in der Chromflüssigkeit glich jetzt ganz dem des Platins, Kraft sowohl wie Beständigkeit erschienen auffallend verringert,“ so erkenne ich nur den zweiten Theil dieses Satzes als richtig an.

Nur eine Erscheinung habe ich bei der Kohle gefunden, welche sich in ähnlicher Weise auch beim Platin gezeigt hatte.

Wenn man nämlich das Kohleelement, während es durch einen grossen Widerstand geschlossen ist, kurze Zeit (10 Sec.) ohne Widerstand schliesst und dann sofort wieder den grösseren einschaltet, so beobachtet man eine kleinere E. K., welche in erst raschem, dann langsamem Wachsen begriffen ist. Dasselbe beobachtet man auch noch bei kleineren Schliessungswiderständen — bei welchen die E. K. merklich abnimmt — wenn die zeitweise Vertauschung mit  $W=0$  schon vorgenommen wird, ehe ein nahezu constanter Werth der E. K. eintritt. Hat man dagegen den Rheostatenwiderstand erst nach annäherndem Eintritt eines constanten Werthes auf einige Secunden ausgeschaltet, so beobachtet man nach sofortiger Wiedereinschaltung des Widerstandes eine rasche

1) Buff, l. c. p. 19.

Zunahme bis zu einem Maximum, welches den vorher erreichten Endwerth übertrifft. Darauf nimmt die E.K. wieder ab bis zu und unter den schon vorher erreichten Werth.

Diese Zunahme über den vor Ausschaltung des Rheostatenwiderstands beobachteten Werth hinaus wurde aber auch bei Platin beobachtet, jedoch blieb beim Platin die E. K. dauernd grösser als vorher, was bei der Kohle nicht der Fall ist.

#### VI. Aluminium in Bunsen'scher Chromsäurelösung.

Die E. K. eines mit Bunsen'scher Chromsäurelösung gefüllten, geöffneten Grove'schen Elementes nahm im Verhältniss 1,45:1 ab, wenn man das Platin durch ein kleines Aluminiumblech ersetzte. Wurde das Aluminiumelement geschlossen, so nahm seine E. K. sehr schnell bis zu einem kleinsten Werthe ab und dann zu. Das nach längerer Zeit erreichte Maximum war kleiner als die E. K. des geöffneten Elementes, nämlich bei:

	$W = 9000$	500	50	10	2
um:	2%	6%	10%	14%	18%.

Hieraus folgt unter Berücksichtigung der Resultate des I. Abschnitts, dass bei kleineren Schliessungswiderständen ein Platin- und ein Aluminiumelement etwa gleiche E. K. besitzen. Wird das Aluminium erschüttelt, so nimmt die E. K. momentan zu, dann langsam ab bis unter den vorher erreichten Werth und endlich wieder zu. Eine kurze Schliessung des Elementes mit  $W = 0$  bringt die E. K. bei einem nachfolgenden grösseren Widerstand auf einen hohen Werth, von dem sie langsam wieder abnimmt.

Aus dem Mitgetheilten geht hervor, dass sich Aluminium dem Platin ähnlich verhält.

Noch möge eine merkwürdige Beobachtung Erwähnung finden. Wenn nach längerer Schliessung das Element geöffnet wurde, so stieg die E. K. ziemlich schnell auf einen Werth an, welcher die E. K. des noch nicht geschlossenen Elementes übertraf. Langsam ging sie dann auf diesen zurück. Hr. Streintz<sup>1)</sup> hat kürzlich eine ähnliche Beob-

1) F. Streintz, Wien. Ber. 86. Juli 1882. — Wied. Ann. 17. p. 841. 1882.

Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XVIII.

achtung beschrieben. Er polarisirte Aluminium in verdünnter Schwefelsäure durch Wasserstoff und fand unmittelbar nach Unterbrechung des polarisirenden Stromes das Aluminium positiver als vor Schliessung desselben.

Eine Erklärung der in dieser Abhandlung beschriebenen Erscheinungen werde ich erst in der dritten Abhandlung zu geben versuchen, nachdem ich zuvor in der zweiten die Resultate einer Untersuchung über das electrische Verhalten von Platin, Palladium, Gold, Gaskohle und Aluminium in Salpetersäure mitgetheilt haben werde.

Giessen, Januar 1883.

#### IV. *Experimentelle Untersuchung über Torsionselasticität; von Max Baumeister.*

(Hierzu Taf. IV.)

Den Hauptgegenstand vorliegender Untersuchungen, die ich auf Veranlassung von Hrn. Prof. Kohlrausch im Winter- und Sommersemester 1880/81 und theilweise im Sommersemester 1882 im physikalischen Institute der Universität Würzburg angestellt habe, bilden die Versuche über Torsionselasticität. Coulomb's gerade vor 100 Jahren angestellte Originalversuche und die Theorie mit modernen Beobachtungsmitteln zu prüfen, mag wohl der Mühe werth sein.

Den ersten Ausgangspunkt ergab die Frage, ob die Coulomb'schen Torsionsgesetze für sehr feine Drähte ihre Gültigkeit verlieren. In einer früheren Arbeit von F. Kohlrausch und F. E. Loomis<sup>1)</sup> über den Temperatureinfluss auf dünne Drähte, findet sich im Anhang der Torsionsmodul und der Ausdehnungsmodul dieser Drähte zusammengestellt, und es ergibt sich eine Verhältnisszahl dieser Grössen, welche von den Resultaten anderer Forscher etwas abweicht. Es entstand die Frage, ob diese Abweichung mit den Dimensionen des Drahtes zusammenhängen konnte, ob auf sehr feine Drähte die gebräuchliche Elasticitätstheorie

1) F. Kohlrausch u. F. E. Loomis, Pogg. Ann. 141. p. 481. 1871.

noch anwendbar ist. Ich suchte diese Frage auf experimentellem Wege zu entscheiden, indem ich mit Serien von feinen und dickeren Drähten desselben Materials und desselben Zuges Bestimmungen ihrer Torsionselasticität vornahm.

Neben dieser Arbeit führte ich Bestimmungen des Elasticitätsmoduls für einige der Drähte durch Längenausdehnungen am Kathetometer aus, deren Resultate ich wiedergebe, wie die für das logarithmische Decrement bei den Torsionsschwingungen und die Tragfähigkeit von Drähten. Nachträglich habe ich das specifische Gewicht von Drähten eingehend untersucht, erstens, weil ich bessere Querschnitte gewinnen wollte, dann, um zu sehen, ob nicht eine solche Untersuchung Aufklärung über den Verlauf der Curven des Torsionsmoduls schaffen würde, und drittens, weil über diesen Gegenstand für feine Drähte wenig vorliegen dürfte.

#### Coulomb's Beobachtungen.

Coulomb sucht in seiner Arbeit: *Recherches théoriques et expérimentales sur la force de torsion, et sur l'élasticité des fils de métal: Application de cette théorie à l'emploi des métaux dans les arts et dans différentes expériences de physique: Construction de différentes balances de torsion pour mesurer les plus petits degrés de force. Observations sur les loix de l'élasticité et de la cohérence*<sup>1)</sup> einmal die Elasticitätskraft der Torsion von Eisen- und Messingdrähten in ihrer Abhängigkeit von Länge, Querschnitt und Spannung, dann die Unvollkommenheit der elastischen Rückwirkung der Metalldrähte auszuwerthen. Er leitet zuerst die Formel der oscillatorischen Bewegung ab unter der Voraussetzung, dass die Rückwirkung der Torsionskraft eines Drahtes gegen Verdrehen seiner Querschnitte proportional ist dem Torsionswinkel, welche Voraussetzung bekanntlich für nicht zu grosse Amplituden der Erfahrung entspricht. Die Dauer einer ganzen Oscillation ist darnach:  $t = \pi \sqrt{K/n}$ , wo  $K$  das Trägheitsmoment des schwingenden Gewichtes und  $n$  die Directionskraft des Drahtes bedeutet.

Die gebrauchten Drähte waren je drei Claviereisendrähte

1) Coulomb, Hist. de l'Acad. Royale des Scienc. 1784, p. 229.

und Messingdrähte, wie sie im Handel, auf Spulen aufgewickelt, vorkommen. Da es sich nur um die Verhältnisszahlen der Massen handelte, sind die specifischen Gewichte der Drähte nicht angegeben, sondern für jeden Draht das Gewicht einer Toise = 6 Pariser Fuss in grains, ausserdem die zum Zerreißen der Drähte nöthigen Gewichte. Daraus, dass die grains ohne Decimalen gegeben sind, würde bei einer Berechnung des Torsionsmoduls nach den gewohnten Formeln schon eine Unsicherheit von etwa 15 % für den feinsten Eisendraht folgen.

Aus dem Ergebnisse sämmtlicher Beobachtungen folgert Coulomb, dass die Torsionskraft eines Drahtes unabhängig ist von der Spannung; dass sie der vierten Potenz des Durchmessers direct und der Länge des Drahtes umgekehrt proportional ist, das Moment der Torsionskraft sich also  $= \mu B D^4 / l$  ergibt; hier bedeutet  $B$  den Torsionswinkel,  $D$  den Durchmesser und  $l$  die Länge des Drahtes,  $\mu$  einen constanten, von der Natur des Metalles abhängigen Coëfficienten.

Die Abweichungen der einzelnen Versuche von diesem Gesetze sind aber nicht unerheblich. Die Werthe der Schwingungsdauern, von Coulomb aus der während zwanzig Oscillationen verflossenen Zeit bestimmt, weichen meistens von den theoretischen um 0,1<sup>sec</sup> ab. Der Exponent des Verhältnisses der Schwingungsdauer zweier Drähte desselben Materials, derselben Länge und der gleichen Belastung ferner, welcher  $= -2$  sein soll, geht bis zu  $-1,82$  herunter, was im Torsionsmodul Fehler von 6—7 % bedeutet. Dazu kommt, dass, wie erwähnt, die Gewichtsangaben in grains ohne Decimalen gemacht sind; von einer experimentellen Prüfung des Gesetzes innerhalb der Beobachtungsfehlergrenzen kann man also nicht sprechen, und es ist wohl gerechtfertigt, diese Prüfung auf dem oben angedeuteten Wege zu unternehmen.

Ehe ich zu den weiteren Angaben über meine Beobachtungen übergehe, fühle ich mich gedungen, Hrn. Prof. Dr. F. Kohlrausch, der mir Material und Raum im physikalischen Institute zu Würzburg zu meinen Versuchen zur Verfügung stellte und mich jederzeit gütigst mit Rath und That unterstützte, hier meinen aufrichtigen Dank auszusprechen.

**Torsionsversuche.**

Der Ausdruck für den Torsionsmodul  $T$ , welcher meinen Berechnungen der numerischen Werthe zu Grunde liegt, lautet:

$$T = \frac{2\pi Kl \text{ kg-Gewicht}}{g t^2 r^4 \text{ qmm}} \text{ im technischen,}$$

$$T = 2\pi \frac{Kl}{t^2 r^4} \text{ kg mm}^{-1} \text{ sec}^{-2} \text{ im absoluten Maasssysteme.}$$

Ueber die Definition des Torsionsmoduls, wie über seine Beziehung zum Elasticitätsmodul  $E$  der Ausdehnung kann man sich in dem bekannten Werke von Clebsch<sup>1)</sup> orientiren.

In diesen Formeln bedeuten:

$l$  die Länge des Drahtes, dessen Torsionsmodul man berechnen will,

$r$  seinen Halbmesser ( $l$  und  $r$  in Millimetern),

$K$  das Trägheitsmoment  $\text{kg mm}^2$  des schwingenden Gewichtes,

$t$  die Schwingungsdauer in Secunden,

$g$  die Fallbeschleunigung =  $9810 \text{ mm sec}^{-2}$ .

#### 1. Schwingungsbeobachtungen.

Für die Schwingungsversuche diente folgende Vorrichtung (siehe Fig. 1 in  $\frac{1}{4}$  natürlicher Grösse).

In einer Zimmerecke wurden in ungefähr 1,9 m Abstand übereinander zwei feste Wandbretter auf Leisten angebracht. In jedes Brett konnte, in etwa 0,05 m Entfernung von der Mitte seiner Hypotenuse ein Holzzapfen eingesetzt werden, der mittelst eines in horizontalen Durchbohrungen des Zapfenkopfes anzubringenden Stiftes drehbar war. Unten trug der Zapfen durch eine Messingverschraubung ein starkes Ypsilonlager und dieses selbst eine ebenfalls starke Klemme von Metallplatten. Der zu untersuchende Draht wurde an seinem oberen Ende von dieser Klemme festgehalten, das untere wurde in ein zweites Backenstück geklemmt, das mittelst eines Ypsilonlagers und eines central in letzteres eingeschraubten Messingstiftes den Spiegel für die Beobachtung mit Fernrohr und Scala und die schwingenden Gewichte trug. Die untere Klemm- und Suspensionsvorrichtung ist

1) Clebsch, Theorie d. Elasticit. fester Körper. Leipz. 1862. p. 10. u. 420.

einfach die Umkehrung der oberen. Das untere Backenstück und untere Ypsilononlager waren in je zwei Stücken für dicke und feine Drähte vorhanden. Der Spiegel wurde durch ein Gegengewicht, den Messingknopf der Schraube, mit welcher er am Messingstifte festgestellt wurde, äquilibrirt. An den Messingstift, den Träger des Spiegels und der Gewichte, war unten eine kreisförmige, raue Messingplatte, welche alle übrigen Gewichte zu tragen hatte, aufgeschraubt.

Ein Kasten mit Glasverschluss diente als Schutz gegen Luftzug.

Zur Veranschaulichung der Methode, nach der ich beobachtete, gebe ich einen Beobachtungssatz, den der Zeit nach letzten mit dem Messingdrahte „hart  $d = 0,384 \text{ mm}$ “ wieder.

Vor und nach der Schwingungsdauerbeobachtung wurde die Amplitude bestimmt. Die Schwingungsdauer wurde aus drei Beobachtungssätzen von je elf Durchgangszeiten im wesentlichen nach dem Gauss'schen Verfahren ermittelt. Die aus den drei Sätzen berechneten  $t$  stimmen in den allermeisten Fällen bis auf einige Tausendtel Secunde überein.

Der Beobachtungssatz ist folgender:

Messingdraht „hart  $d = 0,384 \text{ mm}$ “.

Belastung: Grosse Suspension + sämtliche Messingcylinder.

### I. Satz. Umkehrpunkte.

3h 40min 3sec	447,4	447,6	447,8	448,2	448,6	448,8	449,0
	553,3	553,2	553,0	552,7	552,6	552,3	

#### Durchgangszeiten.

	I	Diff.	II	Diff.	III
3h 42min	50,60sec		45min 46,70sec		50min 40,30sec
	56,60	53,60	52,75	49,72	46,50
	2,30	59,45	58,50	55,62	46,50
43	8,40	5,35	4,50	1,50	52,10
	14,10	11,25	10,25	7,37	58,10
	20,05	17,07	16,25	13,25	58,10
	25,80	22,92	22,00	19,12	3,80
	31,80	28,80	28,00	25,00	10,00
	37,50	34,65	33,70	30,85	15,55
	43,55	40,52	39,80	36,75	21,60
	49,25	46,40	45,60	42,70	27,30
					33,50
					39,00
	$t_1 = 5,863$	$\tau = 176,187^{\text{sec}}$	$t_2 = 5,878$	$\tau = 293,621^{\text{sec}}$	$t_3 = 5,872$
		$n = 30$		$n = 50$	
		$t_{1,2} = 5,8729^{\text{sec}}$		$t_{2,3} = 5,8724^{\text{sec}}$	



## II. Satz. Umkehrpunkte.

3h 52min 46sec	462,9	463,2	463,3	463,5	463,7	463,8	464,1
	543,7	543,5	543,3	543,2	543,1	542,9	

## 2. Belastungen und deren Trägheitsmomente.

Zu schwingenden Gewichten wurden verwendet einmal drei Cylinder aus Zink (spec. Gewicht ungefähr 7,04), *A*, *B* und *C*, jeder 100 mm im Durchmesser und 18 mm hoch, und fünf Messingcylinder  $\alpha$  bis  $\epsilon$  von 50 mm Durchmesser und 3,5 mm Höhe.

Eine eben solche Messingplatte war an einem Messingstifte befestigt und diente als Schlussstück und Träger der anderen Gewichte. Die letzteren waren zu diesem Zwecke durchbohrt.

Die Trägheitsmomente *K* ergeben sich nach der Formel  $K = M(r^2 + r_0^2)/2$ ; *M* bedeutet die Masse, *r* den äusseren und *r*<sub>0</sub> den inneren Halbmesser. Die Dimensionen wurden am Comparator gemessen.

Tab. I. Trägheitsmomente.

		<i>M</i>	<i>r</i>	<i>r</i> <sub>0</sub>	<i>K</i>
Zinkeylinder	<i>A</i> .	0,9427 kg	50,06 mm	1,83 mm	1182,9 kg mm <sup>2</sup>
"	<i>B</i> .	0,9499 "	50,07 "	1,76 "	1192,3 "
"	<i>C</i> .	0,9620 "	50,12 "	1,76 "	1210,0 "
Messingcylinder	$\alpha$ .	0,05821 "	25,02 "	1,78 "	18,31 "
"	$\beta$ .	0,05764 "	25,03 "	1,79 "	18,15 "
"	$\gamma$ .	0,05761 "	25,02 "	1,83 "	18,13 "
"	$\delta$ .	0,05780 "	25,04 "	1,75 "	18,21 "
"	$\epsilon$ .	0,05796 "	25,03 "	1,80 "	18,25 "
Schlusscylinder	.	0,05807 "	24,94 "	1,27 "	18,11 "

Das Trägheitsmoment der einzelnen Suspensionstheile wurde auf empirischem Wege mit einem kleinen Magnete vom Trägheitsmomente 0,94 kg mm<sup>2</sup>, der an einem langen  $\frac{1}{20}$  mm dicken Messingdraht aufgehangen war, gefunden wie folgt:

1) Messingstift + kleines Y-Lager + kleines Backenstück, Trägheitsmoment = 0,25 kg mm<sup>2</sup>.

2) Messingstift + grosses Y-Lager + grosses Backenstück, Trägheitsmoment = 1,41 kg mm<sup>2</sup>.

3) Spiegel, Trägheitsmoment = 0,55 kg mm<sup>2</sup>.

Unter  $K$  werde ich künftig verstehen das Trägheitsmoment der grösseren Suspensionstheile: grosses Backenstück + grosses Y-Lager + Messingstift + Spiegel + Schlussmessingcylinder, sodass  $K$  ist:

$$K = 20,07 \text{ kg mm}^2,$$

und unter  $\kappa$  das der kleinen Theile: kleines Backenstück + kleines Y-Lager + Messingstift + Spiegel + Schlussmessingcylinder:

$$\kappa = 18,91 \text{ kg mm}^2.$$

Um die aus Wägungen und Dimensionsbestimmungen berechneten Werthe für die Trägheitsmomente der schwingenden Gewichte auf empirischem Wege zu bestimmen und zu controliren, wurden bereits bekannte Trägheitsmomente mit den zu bestimmenden in zwei Anordnungen combinirt, ohne die Directionskraft des Drahtes zu ändern, und die den Anordnungen zukommenden Schwingungsdauern beobachtet.

Ich nahm ein prismatisches Stäbchen aus Birnbaumholz, das gegen Verbiegungen sich sehr widerstandsfähig erwies, 200,0 mm lang, 4,7 breit, 0,003 063 kg schwer, Trägheitsmoment = 10.216 kg mm<sup>2</sup>, und zwei gleiche Messingcylinderchen von 6,4 mm Durchmesser und zusammen 0,010 877 kg schwer. Das Stäbchen wurde mit Schellack diametral unter den Schlusscylinder gekittet, und an Coconfäden brachte man die beiden Cylinderchen in den zwei Anordnungen so an, dass sie einmal in der Entfernung 100 mm von der Drehaxe die Schwingungen mit ausführten, das andere mal in der Entfernung Null von derselben, miteinander festverknüpft. Die zugehörige Formel lautet:

$$K = \frac{At'^2 - A't^2}{t^2 - t'^2}.$$

$A$  bedeutet das Trägheitsmoment des Stäbchens und der beiden Cylinder in der Entfernung 100 mm von der Drehaxe,

$t$  die entsprechende Schwingungsdauer,

$A'$  das Trägheitsmoment des Stäbchens und der beiden Cylinder in der Entfernung Null von der Drehaxe,

$t'$  die zugehörige Schwingungsdauer.

Es ergab beispielsweise eine Bestimmung für die kleine Suspension mit sämtlichen Messinggewichten  $K = 109,65$  ( $t = 12,417$  Sec.,  $t' = 7,583$  Sec.), während die Ausmessung

der Cylinder mit dem Maassstabe und die empirisch gefundenen Trägheitsmomente der kleinen Suspension ergaben:  $K = 109,98 \text{ kg mm}^2$ . Die Controle des Trägheitsmomentes der kleinen Suspension und des Messingschlusscylinders lieferte Werthe wie 18,83, 18,89, 18,76, 19,17, 19,14, während die Ausmessung mit dem Maassstabe und die Bestimmung mit dem kleinen Magnete 18,91 ergaben.

Auf Vorschlag von Hrn. Prof. Kohlrausch versuchte ich eine weitere Controle der Trägheitsmomente mittelst bifilarer Suspension. Dieser Methode ist wohl vor der zuerst benutzten, namentlich für grosse Trägheitsmomente, der Vorzug einzuräumen. Es wurde folgende Einrichtung getroffen (s. Fig. 2 in  $\frac{1}{4}$  natürlicher Grösse). An einem Durchzugsbalken, etwa 3,5 m über dem Boden, wurde eine Platte aus hartem Holz, an ihrem schmalen Umfange mit einer Rinnenführung versehen, festgeschraubt. In letztere legte man den Draht für die bifilare Aufhängung; dieser umfasste so den gekrümmten Theil des Plattenumfanges. An den Stellen, wo der Draht das Holz verlässt, sind Messingplättchen aufgenagelt und in diese Schlitzte gemacht, in die der Draht sich senkt und dann scharf nach unten abbiegt. Den Ergänzungstheil unten für die bifilare Zusammenstellung bildet ein prismatischer Messingbalken, an seinen beiden Enden abgeschrägt; über diese gehen, in schiefen Rinnen, die beiden Drahtenden zu Schrauben, von denen sie festgeklemmt werden. In die Mitte des Balkens kann der Messingstift mit Spiegel für Beobachtung mit Fernrohr und Scala und den verschiedenen Gewichten eingeschraubt werden.

Die pendelartige Bewegung an einer solchen Bifilarsuspension, die zufolge ihrer Directionskraft mit einer Schwingungsdauer von  $t^{\text{sec}}$  entsteht, benutze ich zur absoluten Messung des Trägheitsmomentes der Schwingungsvorrichtung.

Der genaue Ausdruck für die Gesamtdirectionskraft einer Bifilarsuspension ist, wenn man gleiche Fadenlänge und gleiche Fadenspannung annimmt:

$$D = \frac{e_1 e_2}{4 l} g m + 2 \epsilon;$$

$e_1$  und  $e_2$  bedeuten den oberen und unteren Fadenabstand,  $l$  die Fadenlänge,  $m$  die Masse der gesamten Aufhängung,  $g$  die Fallbeschleunigung und  $\varepsilon$  die elastische Torsionskraft eines Fadens.

Das Trägheitsmoment der gesamten schwingenden Vorrichtung ist also mit der Directions-kraft der Bifilarsuspension durch den Ausdruck verknüpft:

$$K = \frac{t^3}{\pi^2} \left[ \frac{e_1 e_2}{l} g m + 2 \varepsilon \right].$$

$t$  bedeutet die Schwingungsdauer in Secunden.

Für die Controlversuche waren an dem Messingquerbalken aufgehangen der Messingstift mit Spiegel und Schlusscylinder und dazu einmal Zinkcylinder  $A$ , das zweite mal  $B$ , dann  $C$  und bei einem vierten Versuche alle drei Zinkcylinder. Die Versuche ergaben für das Trägheitsmoment  $K_A = 1230,5$ ,  $K_B = 1238,9$ ,  $K_C = 1253,7$ ,  $K_{A+B+C} = 3673,7$  kgmm<sup>2</sup>, während nach den früher gemachten Angaben, dazu das Trägheitsmoment des Messingquerbalkens = 22,7 genommen, welche Zahl auf empirischem Wege mittelst Schwingungen durch Belastung mit zwei etwa je 21 g schweren Messingcylindern gefunden worden war, die Trägheitsmomente  $K_A = 1224,4$ ,  $K_B = 1233,7$ ,  $K_C = 1251,4$ ,  $K_{A+B+C} = 3626,7$  kgmm<sup>2</sup> waren.

Der Versuch beispielsweise für Bestimmung von  $K_G$  hatte die Werthe geliefert:  $m = 1,0649$  kg,  $e_1 = 99,8$ ,  $e_2 = 100,0$  mm,  $l = 2877,0$  mm,  $g = 9810$ ,  $t = 1,17$  sec.;  $t$  bestimmt nach der Methode der Coincidenzen. Die als Correctionsgrösse im Ausdrucke des Trägheitsmomentes auftretende elastische Torsionskraft des Fadens  $\varepsilon$  berechnet sich, wenn der Torsionsmodul  $T$  bereits bekannt ist, aus  $\varepsilon = (T\pi r^4 / 2l) g$  oder aus  $\varepsilon = \pi^2 k / t^2$ , d. h. man lässt ein gleich langes Drahtstück derselben Sorte unter Spannung eines Gewichtes von bekanntem Trägheitsmomente  $k$  Schwingungen mit der Dauer  $t^{\text{sec.}}$  ausführen. Für den benutzten weichen Eisendraht  $d = 0,27$  mm war  $\varepsilon = 16$ .

Eine Bestimmung an einem feinen Eisendrahte  $d = 0,09$  mm dessen  $\varepsilon$  zu 0,21 berechnet wurde, liefert als Trägheitsmoment des Messingbalkens mit dem Stifte, Spiegel und Schluss-

cylinder 40,30 kg mm<sup>2</sup> während nach den früheren Angaben, das Trägheitsmoment = 41,42 kg mm<sup>2</sup> sein soll.

Die bei den Torsionsversuchen am häufigsten gebrauchten Anordnungen der Trägheitsmomente werden in folgender Tabelle zusammengestellt. Die Werthe anderer Combinationen der Trägheitsmomente, wenn solche gebraucht wurden, können daraus leicht entnommen werden.

In dieser Tabelle haben also  $K$  und  $\alpha$  die p. 11 angegebene Bedeutung; für die Zinkcylinder ferner wurde das mittelst bifilarer Suspension bestimmte Trägheitsmoment und für die Messingcylinder das aus der Ausmessung mit dem Maassstabe und der Wägung berechnete eingeführt.

Tab. II. Uebersicht der Schwingungskörper.

Schwingungskörper	Trägheitsmoment	Gewicht	Schwingungskörper	Trägheitsmoment	Gewicht
	kg mm <sup>2</sup>	kg		kg mm <sup>2</sup>	kg
$\alpha$	18,91	0,0856	$K$	20,07	0,1120
$\alpha + A$	1208,0	1,0284	$K + A$	1209,2	1,0548
" + $B$	2405,5	1,9783	" + $B$	2406,7	2,0047
" + $C$	3617,8	2,9402	" + $C$	3619,0	2,9667
$\alpha + \alpha$	37,22	0,1438	$K + \alpha$	38,38	0,1702
" + $\beta$	55,98	0,2015	" + $\beta$	56,54	0,2279
" + $\gamma$	73,51	0,2591	" + $\gamma$	74,67	0,2855
" + $\delta$	91,73	0,3169	" + $\delta$	92,89	0,3433
" + $\epsilon$	109,98	0,3748	" + $\epsilon$	111,14	0,4013

3) Material, Querschnittsbestimmungen, spezifisches Gewicht der Drähte und endgültige Formeln für den Torsionsmodul.

Material. Die Eisen- und Messingdrähte, die bei den Versuchen verwendet wurden, hat Leonh. Hüttlinger's Fabrik in Schwabach bei Nürnberg mit besonderer Sorgfalt dargestellt.

Eine Reihe von sieben harten Eisendrähten war aus schwedischem Stabeisen. Die Drähte waren aus einem dickeren Drahte  $d = 0,55$  mm hart gezogen worden, ohne dass also zwischen dem Gebrauche zweier aufeinander folgender Ziehlöcher geglüht worden wäre. Die Durchmesser betragen 0,29 bis herab zu 0,09 mm.

Eine weitere Sendung von harten Eisendrähten umfasste Nummern von  $d = 1,23$  bis  $d = 0,20$  mm; sie waren von einem Drahte  $d = 1,75$  ab hart gezogen worden bis zu  $d = 0,50$ ; das Material war wiederum schwedisches Stabeisen. Die drei feineren Drähte dieser Reihe  $d = 0,39, 0,27, 0,20$  mm waren aus steyrischem Holzkohleneisen, von einer Drahtnummer  $d = 0,47$  ab hart gezogen.

Letzteres Material lässt sich nicht feiner ausziehen als bis zu  $d = 0,20$  mm, da der Draht zu spröde wird. Für die letzten drei Querschnitte hielt aber die Fabrik dieses Material als das geeignetste.

Jeder Nummer der letzten Reihe von harten Eisendrähten entspricht eine Nummer in den ausgeglühten Eisendrähten, d. h. ein Theil des Zuges wurde für jede Nummer ausgeglüht.

Das vorzüglichste Material bieten die Messingdrähte hart und weich. Die harten Drähte wurden von einer Nummer „weich  $d = 1,25$  mm“ ab hart gezogen von  $d = 1,00$  bis zu  $0,10$ ; jeder Nummer entspricht ein geglühter Draht. Dabei ist freilich zu bedenken, dass die feineren Nummern nicht mehr im Zieheisen, sondern in Rubinen und Diamanten gezogen werden, und die Geschicklichkeit des betr. Arbeiters, der sich die Löcher selbst aufschneidet, besonders in Betracht kommt. Nach einer Analyse des Herrn Professor Kittler in Darmstadt enthält der Messingdraht weder Eisen noch Blei und ist seine Zusammensetzung:

Kupfer = 73,55 Proc.,

Zink = 26,37 Proc.

Die Kupfer- und Silberdrähte wurden mit Hülfe zweier Zieheisen gezogen, die ersteren von einem gewöhnlichen Leitungskupferdraht  $d = 0,63$  mm ab in den Nummern:  $d = 0,50, 0,40, 0,33, 0,27$  bis zu  $0,17$  der Weite der feinsten Oeffnung im Zieheisen. Nach jedem Gebrauche eines Ziehloches glühte ich das Stück, welches feiner ausgezogen werden sollte, jedoch nicht mehr zwischen  $0,27$  und  $0,17$ . Die Silberdrähte sind ebenso dargestellt, und zwar einmal aus Silber, das aus AgCl reducirt worden war, die Drähte  $d = 0,35, 0,32, 0,18$ , dann aus käuflichem, reinem Silber  $d = 0,32, 0,31$  und  $0,17$ .

Sämmtliche Kupfer- und Silberdrähte sind also als harte anzusehen.

Querschnittsbestimmungen. Die Durchmesser aller meiner Drähte versuchte ich mit dem Mikroskope zu messen. Allein das Ungenügende dieser Bestimmungen für den Vergleich der Torsionsmoduln verschieden dicker Drähte untereinander zeigte sich alsbald. Die Unsicherheit in der Querschnittsbestimmung bei den feinen Drähten, beispielsweise ein Fehler von 0,003 mm im Durchmesser, verursacht schon bedeutende Differenzen im Endresultate. Dazu kommt die Abweichung der Querschnitte von der Kreisgestalt an manchen Stellen des Drahtes. Deshalb bestimmte ich ausserdem die Querschnitte durch Wägung einer gemessenen Länge der Drähte und den zugehörigen spec. Gewichten und führte die Masse  $m$  der Länge Eins in den Ausdruck für den Torsionsmodul ein. Die nach den beiden Verfahren erhaltenen Torsionsmoduln werden später einzeln angegeben werden.

Specifisches Gewicht. Um für das Versuchsmaterial möglichst absolut richtige Werthe der Torsionsmoduln zu erhalten, war eine eingehende Untersuchung über spec. Gewicht geboten. Zuerst suchte ich dieses für die sieben Schwedisch-Stabeisen-Drähte  $d = 0,29$  bis  $0,09$  zu bestimmen. Trotzdem die Wägungen in der Luft und im Wasser an einer Wage ausgeführt wurden, die auf 0,06 mg genau zu wägen gestattete, das Glasgefäss, 1,9 g schwer, in dem die Drähte unter Wasser gebracht wurden, nur an einem Coconfaden hing, das Wasser selbst ausgekocht und unter der Luftpumpe ausgepumpt wurde, war die Unsicherheit im spec. Gewichte für die zwei feinsten Drähte infolge der Beobachtungsfehler, Capillarkräfte etc., 6 Proc. Später gebrauchte ich das Pyknometer. Die Wägungen sind wegen Ausdehnung des Glases mit der Temperatur und des Gewichtsverlustes corrigirt. Eine Genauigkeit bis zu 0,2 Proc. konnte damit bald erreicht werden. Diese Versuche, die ich nur in beschränkter Anzahl anstellen konnte, sollten besonders die Dichteverhältnisse von harten und ausgeglühten Drähten zueinander klarlegen.

Die daraus gewonnenen Zahlen hatte ich als Mittelwerthe bei den Ausrechnungen der Torsionsmoduln zu Grunde gelegt. Da über das spec. Gewicht so feiner Drähte meines Wissens nichts bekannt ist, so habe ich in letzter Zeit Bestimmungen des spec. Gewichts für Reihen von Drähten vorgenommen, deren Resultate ich hier, in Vereinigung mit den wenigen früher gefundenen gebe.

Tab. III. Specifische Gewichte. (Fig. 3.)

Eisen I Nr. 1 bis 5 schwedisches Stabeisen, hart gezogen; Nr. 6 bis 8 steyrisches Holzkohleneisen, hart gezogen von einer Nummer 0,47 mm ab. Eisen II schwedisches Stabeisen hart gezogen von einer Nummer 0,55 mm ab. Messing hart gezogen von einer Nummer 1,25 mm weich abwärts. Silber, käuflich rein und aus AgCl reducirt, Mittelwerth aus verschiedenen Drähten.

	2r	Spec. Gewicht					2r	Spec. Gewicht			
Eisen I	mm					Eisen II	mm				
hart	1,75	7,782	82	84	85	hart	0,30	7,741	47	43	37
"	1,23	7,794	96	98		"	0,25	7,756	68	64	
			96	91	91	"	0,20	7,734	29	17	28
geglüht	"	7,786	88	80	77	"	0,15	7,745	39	55	
hart	1,00	7,794	90	98	95	"	0,12	7,741			
			7,800	794	800	790	"	0,11	7,780	85	
geglüht <sup>1)</sup>	"	7,810	812	798		"	0,095	7,819	37	22	
"	"	7,801	796	798				7,823	14	31	
" <sup>2)</sup>	"	7,805	04	06		Messing					
" <sup>3)</sup>	"	7,793	93	96	802	hart	1,00	8,551	55	57	
hart	0,72	7,805	09	04				8,562	51	61	
			7,804	06	08	geglüht	0,99	8,564	63	58	61
geglüht	"	7,795	90	84	89	hart	0,38	8,531	46	43	48
hart	0,50	7,804	01	04	04	geglüht	"	8,553	65	67	53
"	0,40	7,788	91	85	94	hart	0,10	8,514	11		
"	0,27	7,781	86	84		geglüht	"	8,577	69		
"	0,20	7,749	64	53	53	Kupfer					
						hart	0,63	8,876	62	68	
						Silber	versch.	10,496	32		

1) Geglüht in der Fabrik.

2) In der Esse unter Kohlensäure.

3) Hellroth durch electr. Strom.



Erwägt man, wie ein Draht, während er durch das Zugloch des Zieheisens geht, von zwei Kräften in seiner molecularen Structur angegriffen wird, von denen die eine, die Zugkraft, seine Dichtigkeit zu verringern, die andere dagegen durch seitliches Zusammenpressen dieselbe zu vergrössern strebt, und wie von vorn herein nicht festzustellen ist, welche von beiden vorwaltet, nachdem ja auch bei dem Ziehen bekanntlich die Spannung und die Ziehgeschwindigkeit mit der Dicke der Drähte variirt werden muss, so ist man vielleicht geneigt, auch messbare Unterschiede im spec. Gewichte verschieden dicker Drähte zu erwarten.

Der Process des Ziehens ändert die Dichte von Drähten in messbaren Grössen. Das specifische Gewicht nimmt zu oder ab, die im Augenblicke der Gestaltsänderung beweglichen Molecüle folgen dem Uebergewichte jeder der beiden beim Ziehen auf sie einwirkenden Kräfte. So nimmt das specifische Gewicht der dicken Schwedisch-Stabeisen-Drähte, die von Draht „hart  $d = 1,75 \text{ mm}$ “ ab gezogen wurden, ohne ausgeglüht zu werden, mit abnehmendem Querschnitte zu und scheint bei  $d = 0,72$  den grössten Werth erreicht zu haben. Für die Steyrisch-Holzkohlen-eisen-Drähte ergibt sich bei gleicher Darstellungsart eine Abnahme der Dichte. — Vielleicht ist damit auch der Begriff des Sprödewerdens für Eisendrähte definirt.

Die feinen Nummern der zweiten Serie, die unter den verschiedensten Spannungen und Geschwindigkeiten gezogen wurden, haben bald grösseres, bald kleineres specifisches Gewicht. Das der zwei feinsten Drähte ist grösser als das der übrigen. — Die Bestimmungen für die übrigen Drahtsorten konnten nicht in grösserer Zahl gemacht werden. Das spec. Gewicht des feinsten, harten Messingdrahtes ist wahrscheinlich zu klein gefunden, da dessen Untersuchung gegenüber anderen feinen Drähten, namentlich gegen den geglühten, feinsten Messingdraht, eine äusserst schwierige war; wegen seiner Elasticität nämlich war eine Geradestreckung nicht möglich und die Anwesenheit von Luftblasen bei der Wägung des Drahtes unter Wasser zu vermuthen.

Beim Kupfer musste ich das spec. Gewicht des Drahtes

$d = 0,63$  als auch für die übrigen Drahtstücken geltend annehmen, da ich für weitere Bestimmungen nicht genügende Quantitäten hatte; aus demselben Grunde musste das specifice Gewicht für die zwei Sorten von Silberdrähten zusammen bestimmt werden.

Aus den Resultaten für die geglühten Drähte könnte man folgern, dass durch Ausglühen von Eisen- und Messingdrähten ihre Molecüle sich inniger zusammendrängen. Ich wollte das spec. Gewicht sämmtlicher geglühter Eisendrähte untersuchen; indess, entkleidet man die Drähte der Oxydschicht, so erweist sich die Oberfläche continuirlich, vielleicht infolge nur theilweiser Oxydation, wellenförmig gekrümmt, und es ist nicht möglich, die Drähte so blank zu putzen wie harte. Dieses war am ehesten möglich bei dem Drahte  $d = 1,00$ ; daher sind diese Resultate die zuverlässigsten, die für  $d = 1,23$  und  $d = 0,72$  mussten, wie vorauszusehen, sich zu klein ergeben. Beim Messing ist das Reinigen leicht zu bewerkstelligen. In Uebereinstimmung würde die Zunahme des spec. Gewichtes durch Glühen mit einer Bemerkung Wertheim's<sup>1)</sup> sein, dass Eisen in dicken Drähten durch Anlassen eine geringe Verdichtung erleidet.

Bei den Beobachtungen wurde verfahren, wie folgt: Die zu untersuchenden Drähte wurden jedesmal mit Smirgelpapier sorgfältig blank geputzt und mit Alkohol gereinigt, da sonst durchgehends die Resultate für das spec. Gewicht unrichtig, nämlich zu klein ausfallen mussten. Die Drähte unter Wasser (destillirtes Wasser, das für die Versuche gut ausgekocht worden war) wurden bei jeder Bestimmung unter die Luftpumpe gebracht; je grösser die Oberfläche des Drahtes im Pyknometer war, um so aufmerksamer musste ausgepumpt werden. Wurden mit Eisendrahtstücken einige Bestimmungen hintereinander gemacht, so war besonders zu beachten, dass sie nicht zu lange Zeit beanspruchten, da sonst die Drähte rosteten und die späteren Werthe des spec. Gewichtes zu klein gefunden wurden. — Durch Befolgung dieser Vorsichtsmaassregeln war es möglich, das spec. Gewicht für

1) Wertheim, Pogg. Ann. Ergbd. 2. p. 55. 1848.

dickere Drähte bis auf 0,1 %, das für dünne bis auf 0,2 % genau anzugeben.

### Formeln für den Torsionsmodul.

Die nach dem gewöhnlich angegebenen Ausdrücke  $T = 2\pi Kl/gt^2r^4$  berechneten Werthe des Torsionsmoduls sind zu klein wegen Nichtberücksichtigung der bei Spannungen wirklich auftretenden Längendilatationen und Quervercontractionen der Drähte; für den Vergleich der Resultate bei verschiedenen Belastungen ist es also nöthig, den Modul auf die Belastung Null zu reduciren.

Wird ein Draht von der Länge  $l$  mm und  $Q$  qmm Querschnitt mit  $M$  kg belastet, so verlängert er sich um  $\lambda = lM/EQ$ , wo  $E$  den Elasticitätsmodul erster Art bedeutet. Die Verengerung des Halbmessers des Drahtes ist hierbei  $\rho = \mu r \lambda/l$ ; es soll nach der Elasticitätstheorie  $0 < \mu < \frac{1}{2}$  sein. Ich nehme  $\mu = \frac{1}{3}$  (vgl. p. 606).  $E$  setze ich bei den Ausrechnungen für: Eisen, hart und gegläht = 19000, Kupfer, hart = 12000, Messing, hart und weich = 9000 und Silber, hart = 6500 kg/qmm. Der auf die Belastung 0 kg reducirte Torsionsmodul ist demnach:

$$T = \frac{2\pi}{g} \frac{Kl}{t^2r^4} \left[ 1 + \frac{2}{3} \frac{\lambda}{l} \right].$$

Auf gleiche Temperatur 18° wurden die Beobachtungen für Eisen-, Messing- und Kupferdrähte nach den von F. Kohlrausch und F. E. Loomis gegebenen Formeln reducirt.<sup>1)</sup> Man wird leicht nachrechnen können, dass hiernach um 18° für Eisen und Messing  $T_{18} = T[1 + 0,00049(\theta - 18)]$ , für Kupfer  $T_{18} = T[1 + 0,00058(\theta - 18)]$ , wenn  $\theta$  die Beobachtungstemperatur bezeichnet.

Bei den Silberdrähten bedeutet  $T$  den auf die Belastung Null reducirten Modul, beobachtet bei der angegebenen Temperatur.

1) F. Kohlrausch und F. E. Loomis, Pogg. Ann. 141. p. 497. 1870.

In diese Formeln habe ich nun einmal den Querschnitt, bestimmt aus der Masse  $m$  der Längeneinheit und dem specifischen Gewichte, dann den Durchmesser, gemessen unter dem Mikroskope, eingeführt. — Die daraus berechneten Werthe der Torsionsmoduln bezeichne ich in den Tabellen mit  $T_m$  und  $T_r$ .

#### Torsionsmoduln.

In Tab. IV bis X sind die Beobachtungsdata und die nach den vorigen Formeln berechneten Torsionsmoduln enthalten.

Da wo eine zweite Länge  $l$  desselben Drahtes angegeben ist, bedeutet dieselbe die Länge nach der Beobachtung.

Zu Untersuchungen über Schwingungsdauer und Dämpfung blieb der Draht öfters längere Zeit hindurch belastet. Diese Zeiten stehen unter  $D$ . Das (mit  $10^5$  multiplicirte) log. Decrement  $\lambda$  ist das Mittel aus den Decrementen vor und nach den drei Beobachtungssätzen von Durchgängen.

Bei der Berechnung der Torsionsmoduln von weichen Drähten ging ich von der Annahme aus, dass diese so lange dem Elasticitätsgesetze gehorchen, als nach Aufhebung der Belastung keine Dehnungen zurückbleiben. Sind solche vorhanden, und sind sie klein, so habe ich aus den Verlängerungen die Quercontractionen berechnet (z. B. Messing  $d = 0,182$  oder  $d = 0,100$  Nr. 4). Uebersteigt die Verlängerung einige Millimeter, so erscheinen die Drähte unter dem Mikroskop rau und an vielen Stellen eingeschnürt. Dass die Torsionsmoduln sich alsdann zu klein ergeben, wenn man sie auf dem angegebenen Wege berechnet, ist nicht zu verwundern.

Im allgemeinen sind die Resultate für die geglühten Messingdrähte zuverlässiger als für die geglühten Eisendrähte, da die letzteren sich nicht so wie die ersteren durch eine Zugkraft vor oder bei dem Versuche strecken liessen.

$d$  = Beob. Durchmesser;  $m$  = Masse der Längeneinheit;  $s$  = spec. Gewicht;  
 $l$  = Länge;  $D$  = Dauer der Belastung in Stunden;  $t$  = Schwingungsdauer;  $T_m$   
 und  $T_r$  = Torsionsmoduln für  $18^\circ$  berechnet aus  $m$  und  $s$  oder aus  $d$ ;  $\lambda = \log.$   
 Decrement  $\times 10^5$ ;  $\alpha$  = Amplitude;  $\Theta$  = Temperatur. Ueber die Belast-  
 ungen siehe Tab. I und II.

Tab. IV. Eisen, hart. (Fig. 3.)

$d = 1,231$  bis  $0,502$  Schwedisch Stabeisen, hart gezogen von  $d = 1,75$  ab.

$d = 0,405$  bis  $0,200$  Steyrisch Holzkohleneisen, hart gezogen von

$d = 0,47$  ab.

$d$	$m$	$s$	$l$	Belastung	$D$	$t$	$T_m$	$T_r$	$\lambda$	$\alpha$	$\Theta$
mm	mg/mm		mm			sec					
1,231	9,347	7,798	2331	$K+A+B+C$	16h	2,235	7446	7553	120	0,6°	22°
1,009	6,224	7,800	2275	"		3,218	7912	7886		1,1	22
0,724	3,172	7,809	2315	$K+A+B$		3,209	7950	7922		1,6	21
				" " + C		5,101	8236	7996		1,4	25
				$K+A+B$		6,228	8308	8066		2,8	25
				" " + C		5,099	8241	8002		1,6	25
0,502	1,505	7,804	2319	$K+C$	16h	7,687	8261	7831	140	1,7	25 <sup>1)</sup>
Nr. 1				$K+A+C$		10,789	8246	7816	157	3,6	25
				$K+A+B+C$		13,152	8282	7853		2,7	22 <sup>2)</sup>
0,502	—	—	498,0	$K+A$		3,563	8081	7661		1,7	21
Nr. 2				" + B		4,997	8186	7760		2,0	21
				" + C		6,111	8234	7808		3,1	21
0,405	0,9777	7,794	2323	$K+A$	2,5	11,990	7870	7492		2,8	22
Nr. 1				$K+\alpha$ bis $\epsilon$		12,417	7895	7517		4,7	22
				$K+A+B$		12,404	7912	7532	117	5,2	22
				" " + C		16,840	7952	7570	130	7,7	22
0,405	—	—	496,0	$K+A$	111	20,617	7983	7601	158	8,2	22
Nr. 2				" " + B		5,477	8054	7667		2,4	21
				" " + C		7,700	8118	7730		1,9	22
				" " + C		9,429	8151	7759		1,5	22
0,269	0,4370	7,786	425,0	$K+\alpha$ bis $\epsilon$	17	9,401	8190	7796	108	4,9	20
0,269	—	—	479,4	$K+\alpha$ bis $\delta$		3,474	7869	7660		2,0	20
Nr. 2				" " + $\epsilon$		3,428	7608	7406		0,5	17
				$K+A$		3,745	7628	7426		2,0	17
				" + B	17	12,443	7527	7330		5,6	17
				" " + B		17,522	7573	7372	222	4,7	17
0,200	0,2457	7,764	476,0	$K+\alpha$ bis $\epsilon$		17,458	7626	7423	142	6,1	17
0,200	—	—	460,3	$K+A$		6,687	7489	7560	148	4,9	20
Nr. 2				" " + $\beta + \gamma$	17	21,925	7348	7421	204	7,9	21
0,200	—	—	474,2	$K+\alpha+\beta+\gamma$		21,903	7362	7435	190	8,9	20
Nr. 3				" " + $\delta$		5,430	7586	7662	150	2,8	18
				" " + $\epsilon$		6,061	7576	7652	164	3,6	18
			474,7	" " + $\epsilon$		6,632	7585	7661		4,3	18
			475,0	$K+A$		22,108	7435	7609	212	8,2	18
				" + B		31,247	7436	7609	300	10,9	18

Tab. V. Eisen, hart.  
Schwedisches Stabeisen, hart gezogen. (Fig. 4.)

<i>d</i>	<i>m</i>	<i>s</i>	<i>l</i>	Belastung	<i>D</i>	<i>t</i>	<i>T<sub>m</sub></i>	<i>T<sub>r</sub></i>	$\lambda$	$\alpha$	$\Theta$
mm	mg/mm		mm			sec					
0,295	0,5268	7,747	491,5	$K+A$	2,5 h	10,522	7356	7311		8,8°	19°
				" $+B$		14,801	7411	7366		9,8	19
			491,8	" " $+C$		18,136	7441	7396	218	11,6	19
			491,5	" " "		18,100	7468	7423	167	5,2	20 <sup>b)</sup>
0,249	0,3762	7,768	294,7	$K+A$	16	10,885	8150	7998	158	2,0	24
				" $+B$		15,339	8187	8034	154	2,5	24
				" " $+C$		18,827	8190	8038	148	6,7	24 <sup>b)</sup>
				$K+A$ bis $\epsilon$		5,298	7683	7712		1,2	23
0,200	0,2428	7,734	301,3	$K+A$	2	17,634	7565	7593		2,4	23
				" "		17,575	7611	7640	140	8,8	22
				$K+\alpha+\beta+\gamma$		8,309	8033	7766	148	1,8	22
				" " $+ \delta + \epsilon$		10,160	8003	7736	130	4,6	22
0,150	0,1348	7,755	353,8	$K+A$	16	33,921	7846	7585	300	11,8	22
				" "		33,857	7888	7625		3,4	25 <sup>b)</sup>
				$K+\alpha+\beta$		10,547	7380	7282	186	5,7	22 <sup>b)</sup>
				" " $+ \gamma$		12,166	7368	7270	205	7,6	22
0,121	0,0885	7,741	305,0	" " $+ \delta$	16	13,587	7376	7278		2,5	22
Nr. 1				" " $+ \epsilon$		14,890	7369	7272	212	5,5	23
				" "		14,862	7392	7295	156	4,7	22
				" "		5,477	7588	7305	177	2,0	22
0,122	0,0888	—	250,0	$K$	16	5,472	7644	7435	222	1,9	21
0,110	0,0706	7,785	157,3	$K$		7,663	7679	7470	190	1,5	21
				$+ \alpha$		9,351	7676	7467	195	2,2	21 <sup>b)</sup>
				" " $+ \beta$		10,782	7672	7462		1,7	21 <sup>b)</sup>
				" " $+ \gamma$	16	12,046	7676	7467	215	3,9	21
				" " $+ \delta$		13,204	7666	7467		5,0	21 <sup>b)</sup>
				" " $+ \epsilon$		6,701	7957	7055	132	5,5	20
0,095	0,0519	7,830	131,2	$K$		9,407	7957	7054	124	4,9	20
				$+ \alpha$	16	11,484	7951	7049	118	5,6	20
				" " $+ \beta$		13,246	7941	7040	115	3,9	20
				" " $+ \gamma$		14,797	7950	7048	117	8,0	20
				" " $+ \delta$		16,227	7933	7033	122	5,6	20
				" " $+ \epsilon$							

## Anmerkungen zu den Tabellen IV bis X.

- 1) Schon einige Zeit vor der Beobachtung in Schwingungen.
- 2) Tags darauf beobachtet.
- 3) Der Draht vollführte während der Belastungszeit Schwingungen.
- 4) Nach dem Schwingungssatze  $\lambda = 202$  für  $\alpha = 1,4^\circ$ .
- 5) Nachher  $\lambda = 220$  für  $\alpha = 4,3^\circ$ .
- 6) Vor der Beobachtung etwa 1<sup>b</sup> belastet.
- 7) Vorher  $\lambda = 160$  für  $\alpha = 6,5^\circ$ .
- 8) Vorher  $\lambda = 81$  für  $\alpha = 3,3^\circ$ .
- 9) Vorher  $\lambda = 351$  für  $\alpha = 4,6^\circ$ .

Tab. VI. Eisen, gegläht. (Fig. 3.)

Aus den Drähten der Tab. IV durch Glühen hergestellt. Das spec. Gewicht der ersten drei Drähte = 7,81, das der anderen = 7,80 gesetzt.

$d$	$m$	$l$	Belastung	$D$	$t$	$T_m$	$T_r$	$\lambda$	$\alpha$	$\theta$
mm	mg/mm	mm			sec					
1,012	6,194	2336	$K+A+B+C$	2h	3,214	8243	7996		0,6 <sup>0</sup>	22 <sup>0</sup>
			"		3,213	8251	8003		0,6	22
0,734	3,257	2332	"		6,067	8355	8111	76	5,3	21 <sup>6)</sup>
			"	17	6,062	8364	8122		1,7	20
			$K+B+C$		4,957	8399	8165		0,7	20
0,511	1,552	507,0	$K+A+B+C$	2	6,113	7883	7393		3,2	21
Nr. 1			"		6,125	7854	7365		3,8	21
0,511		2337	$K+A$		7,412	8257	7744		1,1	23
Nr. 2			$K+A+C$		10,434	8350	7831		3,7	24
			$K+A+B+C$		12,760	8350	7833		2,1	24
0,420	1,012	495,0	$K+A$		5,390	7736	6777	200	1,7	17
			" + B		7,598	7757	6796	136	1,9	17
			" " + C		9,307	7780	6816	128	3,3	17
0,273	0,4519	497,3	$K+\alpha$ bis $\epsilon$		3,546	8294	8058		1,2	20
Nr. 2	—	405,6	$K+A$		10,499	8407	8169		3,2	20
Nr. 3	—	322,7	"		9,433	8287	8051	100	3,3	20
Nr. 4	—	492,0	"	63	11,531	8448	8209	98	3,5	18
		492,3	"		11,535	8442	8203	98	4,8	17
Nr. 5	—	493,0	$K+\alpha$ bis $\epsilon$		3,518	8341	8104		3,8	17 <sup>1)</sup>
			$K+A$	2	11,696	8224	7990	84	3,3	17
Nr. 6	—	2314	$K+\alpha$ bis $\delta$		6,916	8477	8236		3,2	20
			" " + $\epsilon$		7,564	8480	8239		2,0	20
			$K+A$		25,138	8366	8129		3,2	20
			$K+A$		25,130	8373	8135		1,9	20
0,200	0,2400	458,0	$K$		2,777	7963	7680		1,1	19
			+ $\alpha$		3,836	7982	7699		0,8	19
			" + $\beta$		4,653	7993	7709		0,9	19
		458,4	" " + $\gamma$		5,354	7982	7698		3,2	18 <sup>2)</sup>
			" " " + $\delta$		5,975	7977	7693		3,1	18
			" " " " + $\epsilon$		6,535	7982	7697		2,7	18
		458,8	$K+A$		21,758	7841	7560		2,9	18

10) Festigkeitsmodul  $p = 56 \text{ kg/qmm}$ .

11)  $p = 40 \text{ kg/qmm}$ .

12) Hier scheint der Draht sich schon verlängert zu haben.

13)  $\lambda$  vorher = 273 für  $\alpha = 5,7^\circ$ , nachher = 153 für  $\alpha = 4,6^\circ$ .

14)  $\lambda$  vorher = 236 für  $\alpha = 4,3^\circ$ , nachher = 131 für  $\alpha = 3,3^\circ$ .

15) Vor dieser Beobachtung war der Draht einige Zeit abgenommen.

16)  $\lambda$  vorher = 203 für  $6,0^\circ$ , nachher = 172 für  $4,6^\circ$ .

17) Wanderung des Nullpunktes der Scala.

18)  $\lambda$  vorher = 292 für  $1,8^\circ$ , nachher = 242 für  $1,4^\circ$ ;  $p = 35 \text{ kg/qmm}$ .

19) Zeitbestimmung etwas unsicher.

Tab. VII. Messing, hart.

(Fig. 3).

<i>d</i>	<i>m</i>	<i>s</i>	<i>l</i>	Belastung	<i>D</i>	<i>t</i>	<i>T<sub>m</sub></i>	<i>T<sub>r</sub></i>	<i>λ</i>	<i>α</i>	<i>θ</i>
mm	mg/mm		mm			sec					
1,001	6,797	8,562	2321	$K + A + B + C$		4,869	3561	3629		0,6°	22° 4'
0,751	3,833	(8,553)	2328	"		8,730	3494	3566		3,3	23
				$K + A + C$	65 <sup>h</sup>	8,673	3536	3611	36	5,7	21
				$x + A$		7,129	3500	3575	45	4,4	21
0,508	1,756	(8,553)	498,0	" + $B$		5,137	3422	3518		1,5	18
Nr. 1				" + $C$		7,196	3478	3575		2,7	17
				" + $A$		8,790	3511	3608	97	8,4	18
Nr. 2	—	—	2354	$K + A + B$		11,191	3419	3513	118	2,8	20
				$K + A + C$		15,638	3489	3595	122	3,8	20
				" + $\alpha$ bis $\epsilon$		15,653	3501	3598		8,8	18 <sup>h</sup>
				$K + B + C$		15,933	3507	3604		8,9	19
				$K + A + B + C$		15,631	3524	3620		7,5	19
				"	3	19,110	3515	3612		7,1	19
0,384	1,005	8,548	499,6	$x + A$		19,083	3527	3625		10,5	20 <sup>h</sup>
Nr. 1				" + $B$		8,932	3462	3561		1,6	14
				" + $C$		12,557	3497	3596		12,1	15
Nr. 2	—	—	2296	$K + \beta + \gamma + \epsilon$		15,399	3504	3605		14,0	15
				$K + \beta$ bis $\epsilon$	2	4,843	3349	3444		0,8	21
				$K + \alpha$ bis $\epsilon$		4,836	3359	3455		0,7	22
0,253	0,4397	(8,548)	498,8	$x + A$		5,376	3383	3479		3,1	22
				$x + \alpha$ bis $\epsilon$		5,873	3395	3491		2,9	22
0,179	0,2168	(8,548)	300,4	$x + A + B$		20,477	3452	3614		4,7	18
				"		6,157	3464	3626	138	1,7	"
				$x + \alpha$		28,997	3445	3607	208	8,3	"
				" + $\beta$		4,050	3407	3429		1,5	"
				" + $\gamma$		5,666	3428	3461	122	4,2	"
				" + $\delta$		6,898	3443	3466	130	5,9	"
				" + $\epsilon$		7,946	3446	3469	113	6,4	"
				" + $\zeta$		8,877	3448	3471	120	5,0	"
0,139	0,1356	(8,548)	250,0	" + $\eta$		9,720	3450	3473	125	2,1	"
				" + $\theta$		5,751	3592	3883		2,8	15
				" + $\iota$		8,054	3607	3899	122	10,6	"
				" + $\kappa$		9,836	3601	3894	126	6,9	"
				" + $\lambda$		11,336	3603	3896	136	9,4	"
				" + $\mu$		12,665	3606	3898	133	8,8	"
				" + $\nu$		13,879	3604	3896		5,6	"
0,100	0,0697	(8,514)	155,3	" + $\xi$	64	13,825	3632	3927	93	5,7	16
				" + $\eta$		8,944	3503	3791	187	5,6	18
				" + $\theta$		12,570	3499	3785	190	2,4	"
				" + $\iota$		15,364	3491	3777	204	2,3	"
				" + $\kappa$		17,750	3478	3763	210	5,8	"
				" + $\lambda$		19,878	3467	3752	200	4,9	"
				" + $\mu$		21,839	3450	3734		3,1	"



Tab. VIII. Messing gegläht. (Fig. 3).

$d$	$m$	$s$	$l$	Belastung	$D$	$t$	$T_m$	$T_r$	$\lambda$	$\alpha$	$\theta$
mm	mg/mm		mm			sec					
0,988	6,632	8,564	2337	$K+A+C$		3,868	3997	4077		3,3°	22°
				$K+A+B+C$		4,726	4003	4083		3,0	"
				"	2,5h	4,722	4011	4090		1,2	" <sup>9)</sup>
				"		8,816	3678	3697		2,1	23
				"	89	8,784	3698	3717		3,2	19
				$K+A$		4,970	3532	3649		1,0	20
				" + $B$		7,000	3548	3665		3,2	20 <sup>9)</sup>
				" " + $C$		8,591	3546	3664		2,8	21
				$\kappa+A+B+C$		8,618	3676	3707		3,4	18
				"	65	8,598	3694	3815		2,6	18
				$\kappa+A$		7,792	3647	3647		1,2	20
				" + $B$		11,069	3647	3646		1,3	" <sup>1)</sup>
				" " + $C$	64	14,819	3539	3640		2,0	"
				$\kappa+\alpha$ bis $\varepsilon$		15,072	3442	3441		3,0	"
				$\kappa+A$		5,539	3545	3812		0,7	"
				$\kappa+A+B$		19,312	3605	3874		4,1	" <sup>9)</sup>
				$\kappa$		86,778	3212	3464		10,2	" <sup>10)</sup>
				$\kappa+\alpha$		3,760	3615	3665		2,0	19 <sup>11)</sup>
				" + $\beta$		5,268	3627	3677		1,9	"
				" " + $\gamma$		6,428	3626	3677		2,9	"
				" " + $\delta$		7,412	3622	3672		3,4	" <sup>2)</sup>
				" " + $\varepsilon$		8,286	3619	3669		2,1	"
				$\kappa$		9,161	3593	3643		3,0	20
				$\kappa+\alpha$		6,814	3422	3652		2,2	18
				" + $\beta$		9,554	3430	3659		2,4	"
				" " + $\gamma$		11,662	3429	3658		4,6	"
				" " + $\delta$		13,461	3419	3649	119	4,3	" <sup>12)</sup>
				" " + $\varepsilon$		15,066	3410	3639		5,9	" <sup>13)</sup>
				$\kappa$	18	16,573	3475	3607	213	5,1	" <sup>14)</sup>
				$\kappa+\alpha$		16,751	3422	3651	050	3,3	"
				" + $\beta$		7,409	3407	3433		4,1	" <sup>11)</sup>
				" " + $\gamma$		10,426	3392	3419		1,4	" <sup>12)</sup>
				" " + $\delta$		13,730	3263	3288	183	3,8	" <sup>14)</sup>
				" " + $\varepsilon$		9,095	3426	3453	147	3,9	"
				$\kappa$		9,020	3483	3510		1,4	"
				$\kappa+\alpha$		12,779	3423	3449	162	4,3	" <sup>13)</sup>
				" + $\beta$		17,556	3296	3322	125	6,8	"
				"		11,791	3413	3439	130	5,2	" <sup>11)</sup>
				$\kappa+\alpha$		16,685	3425	3452	175	9,6	19
				" + $\beta$		22,253	3278	3303		4,6	" <sup>15)</sup>
				" " + $\gamma$		29,316	3199	3224		6,6	"

20)  $\lambda$  vorher = 448 für 0,8°;  $p = 30$  kg/qmm.21)  $\lambda$  vorher = 645 für 3,9°, nachher = 559 für 2,0°.

22) " " 1051 " 3,6, " 731 " 1,3°.

23) " " 1011 " 2,0, " 865 " 0,8°. Zwischenzeit

nur 5 Min.

Tab. IX. Kupfer, hart.

Spec. Gew. = 8,868. Gezogen aus gewöhnlichem Leitungskupfer.

<i>d</i>	<i>m</i>	<i>l</i>	Belastung	<i>D</i>	<i>t</i>	<i>T<sub>m</sub></i>	<i>T<sub>r</sub></i>	$\lambda$	$\alpha$	$\theta$
mm	mg/mm	mm			sec					
0,506	1,800	544,0	$x+A+B+C$	70 <sup>b</sup>	8,150	4553	4658			16 <sup>o</sup>
			$x+A+B$		6,656	4535	4639			"
			$x+A$		4,723	4519	4622			"
			$x+A+B+C$		8,106	4603	4708			"
0,509	1,800	351,5	$K+A$	95	3,809	4515	4504		0,5 <sup>o</sup>	23
			$" + B$		5,362	4538	4528		1,8	"
			$" " + C$		6,573	4546	4536	146	3,5	"
			$" "$		6,543	4584	4574	081	4,6	22
0,404	1,170	419,5	$K+A$	41	6,453	4439	4081		1,6	21
			$" + B$		9,082	4469	4711	187	2,3	"
		419,7	$" " + C$		11,140	4473	4716	188	5,3	" <sup>10)</sup>
			$" "$		11,098	4501	4746	101	6,1	19 <sup>1)</sup>
0,327	0,7655	412,7	$K+A$	3	9,826	4398	4637	163	6,0	"
			$" + B$		13,868	4406	4644	231	6,0	"
		413,0	$" " + C$		17,052	4392	4630		2,1	20 <sup>17)</sup>
			$" "$		17,018	4412	4650	166	1,9	" <sup>8)</sup>
0,272	0,5099	411,5	$K+\alpha$ bis $\delta$	2	4,027	4523	4457		1,0	23
			$" + \epsilon$		4,403	4529	4462		0,6	"
			$K+A$		14,672	4449	4382	217	4,7	"
			$" "$		14,654	4460	4394	163	7,7	"
0,270	0,5075	296,0	$K+A$	17	12,589	4378	4367	267	1,6	20 <sup>18)</sup>
			$" + B$		17,832	4358	4347		3,3	" <sup>12)</sup>
		380,0	$x+\alpha+\beta$		6,891	4410	4501	197	2,1	"
			$" " + \gamma$		7,941	4411	4501	225	3,5	"
0,178	0,2238		$" " + \delta$	66	8,866	4418	4507	219	3,5	"
			$" " + \epsilon$		9,712	4416	4506	221	4,4	"
			$" "$		9,636	4433	4524	154	6,1	18 <sup>3)</sup>

Tab. X. Silber, hart.

Spec. Gew. = 10,434. Die drei ersten käufliches reines Silber, die späteren aus AgCl reducirt.

<i>d</i>	<i>m</i>	<i>l</i>	Belastung	<i>D</i>	<i>t</i>	<i>T<sub>m</sub></i>	<i>T<sub>r</sub></i>	$\lambda$	$\alpha$	$\theta$
mm	mg/mm	mm			sec					
0,319	0,8209	496,0	$K+\alpha+\beta+\gamma$	39 <sup>b</sup>	3,718	2739	2661		0,9 <sup>o</sup>	18 <sup>o</sup>
			$" " + \delta + \epsilon$		4,520	2760	2681		0,6	19 <sup>19)</sup>
			$K+A$		15,176	2672	2595	600	3,6	"
			$" "$		15,145	2688	2611	272	6,1	"
0,310	0,8170	398,4	$K+\alpha$ bis $\epsilon$	66	4,086	2740	2650	288	1,9	22 <sup>1)</sup>
			$K+A$		13,656	2678	2593	446	4,2	"
		432,0	$x+\alpha$		8,373	2585	2552		1,1	19
			$" + \beta$		10,213	2588	2554		3,2	"
0,174	0,2473		$" " + \gamma$	66	11,772	2588	2554		3,8	"
			$" " + \delta$		13,162	2585	2552		4,5	"
			$" " + \epsilon$		14,430	2582	2549		3,5	"
			$" "$		14,352	2611	2575	330	3,3	21

(Fortsetzung von Tab. X.)

$d$	$m$	$l$	Belastung	$D$	$t$	$T_m$	$T_r$	$\lambda$	$\alpha$	$\Theta$
mm	mg/mm	mm			sec					
0,352	1,0343	401,0	$K + \alpha$ bis $\varepsilon$		3,284	2663	2770		0,5 <sup>0</sup>	18 <sup>20)</sup>
			$K + A$		10,953	2610	2710	602	2,9	"
			" + $B$		15,520	2598	2703	891	2,5	"
0,322	0,8484	440,8	$K + A$		14,107	2573	2674		4,6	23 <sup>17)</sup>
			" + $B$		20,062	2545	2646		2,1	"
0,181	0,2645	213,6	$\kappa + \alpha + \beta$		6,672	2622	2667	938	1,4	22 <sup>23)</sup>
			" " + $\gamma$		7,699	2615	2661	1005	2,2	"
			" " + $\delta$		8,607	2614	2660	1050	3,8	"
			" " + $\varepsilon$		9,437	2608	2655	1071	3,5	"

## Discussion der Beobachtungen.

Torsionsmoduln. Die Unterschiede der einzelnen Resultate rühren natürlich theilweise von Beobachtungsfehlern und dabei in erster Linie von den Durchmesser her. Die Drähte erlauben mit dem Mikroskope keine über 0,003 mm hinausgehende Sicherheit der Dickenbestimmung, und insbesondere bei den feinen Drähten gehen hieraus Fehler hervor, welche bis auf 10 Proc. steigen könnten. So gibt auch die Oxydschicht der geglühten Drähte, welche nicht entfernt wurde, im Mikroskop einen zu grossen Querschnitt, also ein zu kleines  $T_r$ . Umgekehrt mag bei den Messingdrähten deren Glanz erklären, dass ihre  $T_r$  grösser als die  $T_m$  ausfallen. Deswegen soll auf die Spalte  $T_r$  kein Gewicht gelegt werden.

Aber auch unter  $T_m$  zeigen sich beträchtliche Unterschiede für dasselbe Material, die hier unmöglich aus Beobachtungsfehlern hervorgehen können, da sie die Unsicherheiten der Querschnittsbestimmung durch Wägung weit übersteigen, welche letztere von 0,5 Proc. für die dicksten bis zu 4 Proc. für die feinsten Drähte gehen können. Einzelne grössere Abweichungen sind wohl auf eine Inconstanz des Querschnittes zurückzuführen. Um die Uebersicht zu erleichtern, sind die gewonnenen  $T_m$  nach der Masse der Längeneinheit als Abscisse graphisch dargestellt, bezogen auf möglichst ein und dasselbe Trägheitsmoment (sämtlicher Zink- oder Messingcylinder). Darunter finden sich für Eisen und Messing die spec. Gewichte eingezeichnet. (Fig. 3 und 4).

Allerdings zeigt z. B. die erste Curve für die Reihe I der Eisendrähte einen regelmässigen Verlauf, indem mit zunehmendem Querschnitt die Torsionsmoduln erst wachsen und dann abnehmen. Das Wachsen findet statt bei dem schwedischen Stabeisen, das Abnehmen bei dem steyrischen Holzkohleneisen. Aber die übrigen Curven lassen solche Regelmässigkeiten vermissen.

Einiges Gewicht ist vielleicht auf den Umstand zu legen, dass in Curve 1 und 2 das spec. Gewicht einen ähnlichen Gang verfolgt wie die Elasticität, sodass die letztere durch eine Verdichtung erhöht zu werden scheint.

Jedenfalls darf man Folgendes schliessen:

1) Durch das Ziehen werden die Drähte in ihrer Dichte und noch mehr in ihrer Elasticität geändert. Eine bessere Uebereinstimmung ist auf dem eingeschlagenen Wege nicht zu erreichen. Das Coulomb'sche Gesetz ist ein ideal richtiges, aber von einer praktischen Gültigkeit und von einem Nachweise innerhalb der Beobachtungsfehler kann nicht die Rede sein.

2) Auch die Spannung scheint nach den Ergebnissen der feinsten Eisen- und Messingdrähte nicht ganz ohne Einfluss zu sein.

3) Die geglühten Drähte scheinen eine grössere Dichte und Torsionselasticität zu besitzen als die ungeglühten, (während ihre Tragkraft bedeutend kleiner ist).

4) Es folgt ferner, dass die Verschiedenheit des Materials selbst in einem und demselben Drahtstücke Schwankungen des Torsionsmoduls veranlasst. Schon Coulomb sagt übrigens p. 261 der citirten Abhandlung:

„Die Untersuchung zeigt viele Unregelmässigkeiten in den Resultaten: zwei Spulen desselben Drahtes und derselben Nummer geben nicht immer dieselbe Kraft bei gleichem Torsionswinkel, was nur der Herstellungsart der Drähte zugeschrieben werden kann, dem grösseren oder geringeren Drucke, den sie erleiden, wenn sie das Loch des Zieheisens passiren, dem Ausglühen, das man ihnen gibt, um allmählich den Durchmesser von Nummer zu Nummer zu bringen.“

5) Als Mittelwerth des Torsionsmoduls würde nach den Tabellen zu setzen sein:

	$\frac{\text{kg}}{\text{qmm}}$		$\frac{\text{kg}}{\text{qmm}}$
Eisen, weich . .	8100	Messing, weich . .	3600
Eisen, hart . .	7800—7900	Messing, hart . .	3300
Kupfer, hart . .	4450	Silber, hart . . .	2650

### Aenderung der Schwingungsdauer und logarithmisches Decrement.

Von den Angaben der Tabellen habe ich noch kurz diejenigen über die Aenderung der Schwingungsdauer oder Directionskraft eines Drahtes bei längerer Belastung und das logarithmische Decrement zu besprechen.

„Die Schwingungsdauer der harten und weichen Drähte nimmt im allgemeinen mit wachsender Zeit für die Dauer der Belastung ab, ob nun der Draht in der Zwischenzeit Schwingungen vollführte oder nur belastet blieb und zu der zweiten Beobachtung wiederum tordirt wurde.“

Die Belege für diesen Satz finden sich in den Tabellen. Nur in ein paar Fällen ist nicht zu entscheiden, ob nicht die Aenderungen eine Folge der Temperaturdifferenz bei den Beobachtungen sind.

Warburg<sup>1)</sup> fand an einem ausgeglühten Kupferdrahte, dass die Schwingungsdauer abhängig ist von der seit einer Spannungsänderung verflossenen Zeit, und zwar mit wachsender Zeit abnehmend, einerlei ob die Spannungsänderung in einer Zunahme oder Abnahme der Spannung bestand.

In der Abhandlung von F. Kohlrausch und F. E. Loomis<sup>2)</sup> heisst es, dass die Schwingungsdauer bei derselben Temperatur von einem auf den anderen Tag kleinen Aenderungen unterworfen zu sein scheint.

Der oben ausgesprochene Satz gilt aber für weiche Eisen- und Messingdrähte nur bis zu bestimmten Belastungen. Von einer gewissen Grösse der Belastung an nimmt bei den weichen Drähten die Schwingungsdauer nach längerer Belastungszeit zu, die Torsionskraft also ab, auch ohne dass nach

1) Warburg, Abhandl. der naturf. Gesellsch. Freiburg i. B., 1879. p. 451.

2) F. Kohlrausch u. F. E. Loomis, Pogg. Ann. 141. p. 497. 1870.

dem Versuche bleibende Dimensionsänderungen des Drahtes zu verzeichnen sind. Diese Zunahme in  $t$  erfolgt schon bei Belastungen, die nicht die Hälfte der wahrscheinlichen Maximalbelastung erreichen; in wie weit hier die Elasticitätsgrenze in Betracht kommt, ist aus den wenigen Versuchen für weiche Drähte nicht zu ersehen.

Eine Elasticitätsänderung anderer Art zeigt F. Kohlrausch<sup>1)</sup>: Die Schwingungsdauer eines ausgeglühten Eisendrahtes konnte dadurch, dass das Gewicht in sehr stark drehende Bewegungen versetzt worden war, von 6,256 auf 6,411 Sec. gebracht werden. Aus den in den Tabellen angegebenen Amplituden ist zu ersehen, dass solche gewaltsame Einflüsse auf meine Drähte nicht ausgeübt wurden.

Dämpfung. In den Tabellen bedeutet  $\lambda$  das arithmetische Mittel aus den mit  $10^5$  multiplicirten Werthen der logarithmischen Decremente zweier aufeinander folgender Schwingungsbogen vor und nach den Durchgangsbeobachtungen gerechnet in Brigg'schen Logarithmen.

Die Zahl der aufgeführten Werthe  $\lambda$  ist eine geringe, da bei kleinen Amplituden kein regelmässiges Decrement zu Stande kam, und oftmals die Wanderung des Nullpunktes auf der Scala eine bedeutende war, ausserdem aber nur die zuverlässigen Werthe eingetragen sind. Die Decremente sind bis auf etwa eine Einheit der vierten Decimalstelle genau. Die zum Vergleiche der Werthe  $\lambda$  untereinander nöthigen Daten sind in den Tafeln enthalten. In den meisten Fällen erklären die von Streintz<sup>2)</sup> gegebenen Sätze die Aenderungen der logarith. Decremente.

Bei grösseren Amplituden mit steigender Belastung scheint die Dämpfung zuzunehmen. Die Decremente für die ausgeglühten Eisendrahte sind zu wenige, um gegenüber den für die harten Drähte gefundenen in Betracht kommen zu können.

1) F. Kohlrausch, Ueber die elastische Nachwirkung bei der Torsion, Inaug.-Dissert., Göttingen 1863 p. 40.

2) Streintz, Wien. Ber. (2) 69. p. 337. 1874. Wien. Ber. (2) 80. p. 190. 1879.

### Elasticitätsmodul aus Längenausdehnungen und Cohäsion der Metalldrähte.

Die Bestimmungen des Elasticitätsmoduls aus Längenausdehnungen wurden versucht, um wo möglich Verschiedenheiten im elastischen Verhalten verschieden dicker Drähte für beide Arten der Elasticität zu constatiren und damit den Werth der Zahl  $\mu$ , des Verhältnisses der Quercontraction zur Längendilatation bei der Spannung eines Drahtes aufzufinden. Da Beobachtungsreihen für so feine Drähte wohl nicht zahlreich vorliegen, gebe ich die Resultate.

Um Torsionsschwingungen der feinen Drähte zu vermeiden, tauchte eine in die Schale eingeschraubte Blechfahne in ein Wasserbad. Die Messungen geschahen am Kathetometer mit Mikroskop, das bis auf 0,02 mm abzulesen gestattete. Die in Betracht kommende Länge des zu untersuchenden Drahtes betrug ein Meter. Vor den Versuchen wurden die Drähte längere Zeit belastet. Die beiden Marken zur Ablesung wurden an den Drähten entweder durch zarte Striche von weisser und rother Oelfarbe aufgetragen, auf deren Berührungslinie das Fadenkreuz eingestellt wurde, oder es war auf den Eisendrähten Kupfer niedergeschlagen und in dieses die Marke eingeritzt worden.

Durch die Beobachtungsfehler ist natürlich hier eine bedeutende Unsicherheit der Resultate bedingt; für den Eisendraht verursacht ein Fehler von 0,03 mm in der Verlängerung eine Unsicherheit im Elasticitätsmodul bis zu 9 Proc. Dazu kommt die elastische Nachwirkung, die besonders beim Messing störend auftritt. Wertheim hat bekanntlich diese nicht berücksichtigt.

Die Zahlenwerthe der Versuche, die wenigstens eben so genau wie die der Wertheim'schen Originalversuche sein dürften, werden in folgender Tafel aufgeführt. Der Elasticitätsmodul  $E$  wurde in gewöhnlicher Weise berechnet. Der Querschnitt wurde bestimmt aus der Masse der Längeneinheit und dem specifischen Gewichte. Die theoretische Relation zwischen dem Elasticitätsmodul  $E$ , der Ausdehnung

und dem Modul  $T$  der Torsionselasticität, aus der die Zahl  $\mu$  berechnet werden kann, lautet ferner:  $T = \frac{1}{2} E / (1 + \mu)$ .

Tab. XI. Elasticitätsmoduln der Ausdehnung für 20°.

Durchmesser	$\varepsilon$	$T$	$\mu$	Durchmesser	$\varepsilon$	$T$	$\mu$
Eisen, 1. Reihe				Eisen, 2. Reihe			
1,23 mm	19800	7420	0,33	0,30 mm	19400	7400	0,31
1,01 „	19400	7880	0,23	0,25 „	21500	8160	0,32
0,72 „	20800	8280	0,25	0,11 „	21900	7680	0,42
0,50 „	20400	8220	0,23	0,09 „	21000	7960	0,32
0,20 „	20100	7540	0,33	Messing			
Eisen, 2. Reihe				1,00 mm	9540	3550	0,34
0,30 mm				0,75 „	9720	3480	0,39
0,25 „				0,10 „	10540	3500	0,50

Die Resultate sind zu variabel, um bestimmte Schlüsse aus ihnen zu ziehen. Die Verhältnisszahl  $\mu$  liegt zwischen  $\frac{1}{4}$  und  $\frac{1}{2}$ ; ich hatte sie für die Reductionen der Torsionsmoduln auf die Belastung  $0 \text{ kg} = \frac{1}{2}$  angenommen.

Schliesslich sei noch einiges über die Cohäsion der gebrauchten Metalldrähte angeführt. Die Versuche, welche ich gelegentlich über die Festigkeit der Drähte an der für die Längenausdehnungen getroffenen Vorrichtung durch allmähliches Auflegen von Gewichten anstellte, wurden veranlasst durch das Verhalten der zwei feinsten Eisendrähte; beide erwiesen sich beim Verbiegen und Dehnen widerstandsfähiger als andere feine Drähte. Ihre Tragfähigkeit ergab das  $1\frac{1}{2}$ -fache der anderen Nummern, und ich glaubte, daraus entnehmen zu können, dass diese zwei Drähte durch den Process des Hartziehens zu guten Stahldrähten geworden waren.

Die Versuche mit ausgeglühten Drähten ergaben ungefähr halb so grosse Werthe  $p$  wie die für gleich dicke, harte Drähte. Nach den bedeutenden Verlängerungen, die hier bei zunehmender Spannung auftraten, erwiesen sich aber die Drähte unter dem Mikroskope rauh und an vielen Stellen gekerbt, sodass alsdann weitere Querschnittsbestimmungen



nicht mehr vorzunehmen waren. (Ueber Versuche mit ausgeglühten Drähten siehe Bottomley.<sup>1)</sup>)

In der Tabelle sind die für harte Drähte gewonnenen Zahlen aufgeführt. Diese, wie auch die von Coulomb<sup>2)</sup> angegebenen Werthe für die Tragfähigkeit seiner Drähte, bestätigen, dass die Zerreißungsfestigkeit eines Drahtes, auf gleiche Querschnittsfläche reducirt, desto grösser sich herausstellt, je feiner derselbe ausgezogen wurde<sup>3)</sup>, und wie misslich ferner die Schätzung der Tragkraft eines Drahtes nach den vorhandenen Versuchen über Festigkeit von Drähten stets sein wird.

Tab. XII. Tragfestigkeit.

Hart	d	p	Hart	d	p
	mm	kg/qmm		mm	kg/qmm
Schwed. Stabeisen	0,72	64	Messing . . .	0,75	76
1. Reihe	0,50	83		0,25	98
Steyr. Holzkohleneisen	0,40	86		0,18	93
	0,27	88		0,10	98
	0,20	94	Kupfer . . . .	0,27	35
Schwed. Stabeisen	0,30	96	Silber . . . .	0,35	30
2. Reihe	0,25	94			
	0,20	94			
	0,15	98			
	0,12	94			
	0,11	137			
	0,10	123			

Würzburg, Physikal. Inst., Juli 1882.<sup>4)</sup>

1) Bottomley, Proc. Roy. Soc. 29. p. 221. 1879. Beibl. 4. p. 242.

2) Coulomb, Mém. de l'Acad. d. Sc. 1784. p. 237. u. 239.

3) Vgl. Karmarsch, Pol. C.-Bl. 1859. p. 1272.

4) Herr Dr. Baumeister ist kurz vor Vollendung des Druckes in San Remo gestorben.  
Die Red.

V. *Thermochemische Untersuchungen;*  
*von Eilhard Wiedemann.*

Ueber die Molecularwärme von Lösungen.

Für die Lösungen von festen Körpern in Wasser und anderen Flüssigkeiten kann man ebenso wie für die Körper selbst eine Molecularwärme berechnen.

Kommen nämlich auf ein Molecül Salz mit dem Moleculargewicht  $M$   $n$  Molecüle Lösungsmittel mit dem Moleculargewicht  $m$ , ist  $c$  die specifische Wärme der Lösung, so kann man:

$$c(M + mn)$$

als die Molecularwärme der Lösung auffassen und etwa wenn  $\gamma$  die specifische Wärme des Lösungsmittels ist,  $mn\gamma$  als die Molecularwärme desselben in der vorliegenden Lösung bezeichnen.

Die specifische Wärme wässriger Lösungen ist kleiner als eins und wir können setzen:

$$c = 1 - \chi,$$

wo  $\chi < 1$  ist.

Ferner ist hier  $m = 18$  und die Molecularwärme der Lösung wird:

$$(1 - \chi)(M + 18n).$$

Man hat vielfach untersucht, ob die Molecularwärme der Lösung  $(1 - \chi)(M + 18n)$  grösser oder kleiner als diejenige des darin enthaltenen Wassers  $18.n$  ist, also ob in der Gleichung:

$$(1 - \chi)(M + 18.n) = 18n + \alpha,$$

der Werth:

$$(1) \quad \alpha = M - \chi(M - 18n),$$

d. h. der Unterschied der beiden Molecularwärmen grösser, gleich oder kleiner als Null wird.

In der folgenden Tabelle<sup>1)</sup> sind für einige Salze, Natriumchlorid, Ammoniumsulfat, Natriumsulfat und Natriumnitrat

1) J. Thomsen, Pogg. Ann. 142. p. 337. 1871.

die Werthe der hier in Betracht kommenden Grössen zusammengestellt.

$n$	$c$	$M + n18$	$c(M + n18)$	$\alpha$	$\chi$	$\chi(M + n18)$
-----	-----	-----------	--------------	----------	--------	-----------------

Natriumchlorid  $\text{NaCl} + \text{H}_2\text{O}$ .

10	0,791	58,5 + 180	188,5	+ 8,5	0,209	49,84
20	0,863	58,5 + 360	361,0	+ 1,0	0,137	57,32
30	0,895	58,5 + 540	536	— 4	0,105	62,84
50	0,931	58,5 + 900	892	— 8	0,069	66,14
100	0,962	58,5 + 1800	1788	—12	0,038	70,60
200	0,978	58,5 + 3600	3578	—22	0,022	80,47

Ammoniumsulfat  $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4 + n\text{H}_2\text{O}$ .

30	0,820	132 + 540	551	+11	0,180	120,0
50	0,871	132 + 900	899	— 1	0,129	133,1
100	0,924	132 + 1800	1785	—15	0,076	145,8
200	0,959	132 + 3600	2576	—21	0,041	153,0

Natriumsulfat  $(\text{Na}_2\text{SO}_4 + n\text{H}_2\text{O})$ .

65	0,892	142 + 1170	1170	0	0,108	141,7
100	0,920	142 + 1800	1187	—13	0,080	155,4
200	0,955	142 + 3600	3574	—26	0,045	168,4

## Natriumnitrat.

10	0,769	85 + 180	203,8	+23,8	0,231	61,21
25	0,863	85 + 450	461,7	+11,7	0,137	73,30
50	0,918	85 + 909	904	+ 4	0,082	81,51
100	0,950	85 + 1800	1791	— 9	0,050	94,25
200	0,975	85 + 3600	3593	— 7	0,025	92,10

Bei diesen und allen sonst bisher untersuchten Substanzen nimmt  $\alpha$  mit abnehmender Concentration ab. Dass dieser Gang des Werthes  $\alpha$  nichts Ueberraschendes hat, möge die folgende Betrachtung zeigen.

Ist  $n = 0$ , haben wir also reines Salz, so wird  $\alpha$  positiv, da dann  $\alpha = M - \chi M$ , und die spezifische Wärme  $(1 - \chi)$

eine positive Grösse ist. Dasselbe ist für sehr kleine Werthe von  $n$ , also sehr concentrirte Lösungen der Fall.

Ob für grosse  $n$  d. h. verdünnte Lösungen  $\alpha$  positiv oder negativ wird, hängt von der Art der Veränderung von  $\chi$  mit  $n$  ab. Nimmt  $\chi$  langsamer ab, als  $n$  anwächst, so muss  $\alpha$  negativ werden, da dann das Glied  $18n\chi$  mehr und mehr zunimmt. Dies ist aber bei allen Salzlösungen für niedrige Concentrationen der Fall, da sich ihre specifische Wärme asymptotisch derjenigen des Wassers, also  $\chi$  asymptotisch der Null nähert.

Bei grossen Concentrationen ist demnach  $\alpha$  positiv und nähert sich bei wachsender Verdünnung allmählich der Null, um dann negativ zu werden.

Die Molecularwärme der Lösung ist daher bei grossen Concentrationen grösser, bei kleineren kleiner und bei mittleren gleich derjenigen des Wassers in der Lösung.

Der Werth  $\alpha = \text{Null}$  tritt nach der Gleichung (1) ein, sobald:

$$M = \chi(M + 18n).$$

Das heisst mit anderen Worten: Soll die Molecularwärme einer Lösung gleich derjenigen des in ihr enthaltenen Wassers sein, so muss die Abweichung  $\chi$  der specifischen Wärme der Lösung von der Einheit, multiplicirt mit dem Moleculargewicht  $(M + 18n)$  der Lösung, gleich dem Moleculargewicht  $M$  des Salzes sein.

Diese Relation bestätigen die Versuche, wie die Vergleichung der Zahlen unter  $M$  und  $\chi(M + 18n)$  in der Tabelle ersehen lässt. Für Natriumchlorid  $M = 58,5$  wird  $\alpha = 0$  für einen Werth von  $\chi(M + 18n)$ , der zwischen 57,3 und 62,84 liegt, für Ammoniumsulfat ( $M = 132$ ) für einen solchen zwischen 120 und 133,1, für Natriumsulfat ( $M = 142$ ) ist  $\alpha = 0$  für  $\chi(M + 18n) = 141,7$ , für Natriumnitrat ( $M = 85$ ) ist  $\alpha = 0$ , für  $\chi(M + 18n)$  zwischen 81,57 und 94,25.

Eine Bestimmung der Grösse  $\alpha$  hat indess nur untergeordneten Werth, da alle Fehler, in der Bestimmung der specifischen Wärme  $c$   $(M + 18n)$  mal vergrössert in  $\alpha$  eintreten.

Wir könnten auch folgende Betrachtungen anstellen.

Salz und Wasser mögen mit den ihnen im freien Zustande zukommenden specifischen Wärmen  $\gamma$ , wo  $\gamma < 1$ , und 1 in die Lösung eintreten. Sind dann  $x$  Theile Salz,  $1 - x$  Theile Wasser in der Gewichtseinheit Lösung vorhanden, und ist deren specifische Wärme  $C$ , so ist:

$$C = 1(1 - x) + \gamma x = 1\delta \quad \text{oder} \quad \gamma = 1 - \frac{\delta}{x}.$$

Soll  $\gamma$  einen constanten Werth erhalten, so muss  $\delta$  proportional mit  $x$  wachsen. Dies ist aber nach den Versuchen nicht der Fall.

Das Salz kann also nicht in seinem ursprünglichen Zustande in der Lösung vorhanden sein, sondern ist wahrscheinlich locker an Wassermolecüle gebunden. Die zu der Aufhebung dieser Bindung bei einer Temperaturerhöhung nöthigen Wärmemengen treten in  $C$  mit ein.

Diese Bindung ist bei concentrirten Lösungen eine andere als bei verdünnten, wie unter anderen die Versuche über Endosmose von Hrn. Pfeffer<sup>1)</sup> zeigten. Berücksichtigt muss auch werden, dass die Salze meist nicht als Anhydride, sondern als Hydrate in den Lösungen enthalten sind und dass concentrirte Lösungen neben Hydrat noch wasserfreies Salz enthalten können. Da dies auch für einige der von Hrn. Volkmann<sup>2)</sup> auf ihre Capillarität untersuchten Salze wie Natriumsulfat, Chlorcalcium mit grosser Bestimmtheit nachgewiesen ist, so ist dessen Verfahren, aus den Capillaritätsconstanten der Lösungen diejenigen der wasserfreien Salze selbst zu berechnen, nicht zulässig.

Wenn Hr. Volkmann nichtsdestoweniger eine Uebereinstimmung zwischen den Beobachtungen und seiner Theorie findet, so dürfte dies an der Art seiner Betrachtungsweise liegen.

Sind nämlich zwei Flüssigkeiten mit den Cohäsionen  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  so gemischt, dass in der Volumeneinheit der Volu-

1) W. Pfeffer, Beibl. 2. p. 190.

2) Volkmann, Wied. Ann. 17. p. 353. 1882.

mentheil  $u_1$  der Flüssigkeit I, der Volumenthail  $u_2$  der Flüssigkeit II zukommt, so ist nach Poisson die Cohäsion des Gemisches:

$$\alpha = u_1^2 \alpha_1 + 2 u_1 u_2 \alpha_{12} + u_2^2 \alpha_2.$$

$\alpha_{12}$  soll hierbei ein Maass der Anziehung der Theilchen der Flüssigkeit I auf die Theilchen der Flüssigkeit II darstellen.

Bei Salzlösungen wird  $\alpha_1$  gleich den beobachteten Werthe bei Wasser gesetzt und  $\alpha_2$  und  $\alpha_{12}$  aus höchstens sechs, meist aber weniger Bestimmungen von  $\alpha$  bei verschiedenen Werthen von  $u_1$  und  $u_2$  ermittelt. Da die Werthe von  $u_1$ , für welche die Beobachtungen angestellt wurden, ziemlich nahe aneinander liegen, so muss eine derartige quadratische Gleichung, wie die obige, stets innerhalb der Beobachtungsfehler die direct gefundenen Zahlen befriedigend wiedergeben.

Noch möchte ich bemerken, dass die von Hrn. Volkmann angeführte Thatsache, dass bei Kaliumnitrat mit zunehmender Concentration die Reibungscoefficienten erst ab- und dann zunehmen, was übrigens zuerst von Girard i. J. 1816 beobachtet wurde, durchaus nicht vereinzelt dasteht, sondern dasselbe nach Untersuchungen von Hrn. Sprung<sup>1)</sup> in dem hiesigen phys.-chemischen Laboratorium bei einer ganzen Gruppe von Salzen stattfindet, so bei dem Chlorkalium, Chlorammonium u. a. m.

Dieselben Betrachtungen über die specifische Wärme, wie für Lösungen in Wasser, lassen sich auch auf solche in Schwefelkohlenstoff übertragen.

Hier ist die oben betrachtete Differenz  $\alpha$ , so weit die Versuche reichen, positiv, indess zeigt sie meist eine Abnahme. Die früher betrachteten Grössen  $\chi$  sind hier sehr klein und gehört daher schon ein sehr grosses  $n$  dazu, um ein negatives  $\alpha$  zu erzeugen.

1) Sprung, Pogg. Ann. 159. p. 1. 1876.

# VI. Ueber die Newton'schen Staubringe; von E. Lommel.

Schon vor einiger Zeit hat Hr. K. Exner eine Abhandlung<sup>1)</sup> veröffentlicht, in welcher er die von mir aufgestellte Theorie der Newton'schen Staubringe<sup>2)</sup> bekämpft. Ich begnügte mich damals damit, gelegentlich auszusprechen<sup>3)</sup>, dass diese Theorie von Hrn. Exner mit Unrecht bestritten wird. Da aber Hr. Exner auch neuerdings<sup>4)</sup> fortfährt zu behaupten, dass er „meine Theorie widerlegt<sup>5)</sup>“, „die Fehler in meinen Rechnungen, sowie die Unrichtigkeit meiner schliesslichen Formeln dargelegt“ habe, so sehe ich mich doch veranlasst, diesen grundlosen Behauptungen ein definitives Ende zu machen.

Nach meiner Theorie wird die Excursion in einem Punkte des Interferenzbildes, welches durch zwei hinter einander aufgestellte beugende Schirme (oder durch einen Schirm und sein Spiegelbild) hervorgebracht wird, ausgedrückt durch die Formel:

$$E = E_1 + E_2$$

$$= \frac{1}{2} n \iint \sin(p - qx - ry + sz) dx dy + \frac{1}{2} n \iint \sin(p - qx - ry - sz) dx dy,$$

wo jedes der beiden Doppelintegrale über alle jene Theile des zugehörigen Schirmes auszudehnen ist, welche Licht durchlassen, und zur Abkürzung:

$$\frac{2\pi}{\lambda}(vt - k) = p, \quad \frac{2\pi}{\lambda}(l - a) = q,$$

$$\frac{2\pi}{\lambda}(m - b) = r, \quad \frac{2\pi}{\lambda}(n - c) = s,$$

gesetzt wurde, während  $l, m, n$  die Richtungscosinus der einfallenden,  $a, b, c$  die der gebeugten Strahlen bedeuten, und  $k$

1) Exner, Wied. Ann. **9**. p. 239. **11**. p. 218. 1880.

2) Lommel, Wied. Ann. **8**. p. 204. 1879.

3) Lommel, Carl's Rep. **16**. p. 455. Anmerk. 1880.

4) Exner, Wied. Ann. **17**. p. 159. 1882.

5) Hr. Exner erklärt sogar in der Vorrede des von ihm herausgegebenen Werkes von Verdet: „Vorlesungen über die Wellentheorie des Lichtes“ (Braunschweig, 1881), dass meine Theorie dieser Erscheinungen „vollständig widerlegt“ sei.

die Entfernung des Coordinatenanfangs vom Vereinigungspunkt der einfallenden Strahlen oder den Radius der halbkugelförmigen Bildfläche darstellt.

Der Factor  $\frac{1}{2}$  bezieht sich nur auf die direct durchgehenden Strahlen und muss hinzugefügt werden, damit nicht jeder direct einfallende Strahl doppelt gezählt werde. Bei den gebeugten Strahlen hat er wegzufallen; in den betreffenden Formeln meiner Abhandlung ist er aus Versehen stehen geblieben, was jedoch für die Theorie selbst ohne Belang ist.

Besteht der vor dem Spiegel befindliche Schirm aus kleinen undurchsichtigen Körperchen, so haben wir also nach Anwendung des Babinet'schen Principis für das gebeugte Licht:

$$E = E_1 + E_2$$

$$= -n \iint \sin(p - qx - ry + sz) dx dy - n \iint \sin(p - qx - ry - sz) dx dy,$$

wo nun die Doppelintegrale über die Projectionen sämtlicher beugender Körperchen auf die Spiegelebene zu nehmen sind.

Sind  $x_v, y_v, z_v$  die Coordinaten eines bestimmten Punktes (z. B. des Mittelpunktes) eines der Körperchen, und setzen wir:

$$x = x_v + x', \quad y = y_v + y',$$

sodass nun die laufenden Coordinaten  $x'$  und  $y'$  in der  $xy$ -Ebene für jedes Körperchen von dem Punkte  $x_v, y_v$  zu zählen sind, wobei  $z$  unverändert  $= z_v$  bleibt, so hat man:

$$E = E_1 + E_2$$

$$= -n \sum \iint \sin(p - qx' - ry' - qx_v - ry_v + sz_v) dx' dy'$$

$$- n \sum \iint \sin(p - qx' - ry' - qx_v - ry_v - sz_v) dx' dy',$$

wo die Summenzeichen  $\sum$  sich über alle vorhandenen Werthe des Index  $v$  erstrecken.

Da die beiden Doppelintegrale unter den gemachten Voraussetzungen die gleichen Grenzen haben, so kann man dieselben zu einem einzigen Doppelintegral vereinigen, indem man die Wirkung eines jeden Körperchens mit derjenigen seines Spiegelbildes zusammenfasst. Man erhält so:

$$E = -2n \sum \cos sz_v \iint \sin(p - qx' - ry' - qx_v - ry_v) dx' dy',$$

oder, wenn man:



$$\iint \cos(qx' + ry') dx' dy' = C_v,$$

$$\iint \sin(qx' + ry') dx' dy' = S_v,$$

und:

$$qx_v + ry_v = \alpha_v$$

setzt:

$$E = -2n \sin p (\sum C_v \cos sz_v \cos \alpha_v - \sum S_v \cos sz_v \sin \alpha_v) \\ + 2n \cos p (\sum S_v \cos sz_v \cos \alpha_v + \sum C_v \cos sz_v \sin \alpha_v)$$

Sind sämtliche Schirmchen oder Körperchen unter sich gleich und ähnlich gelagert, so sind alle  $C_v$  einander gleich ( $= C$ ), ebenso alle  $S_v (= S)$ ; setzt man ferner:

$$\sum \cos sz_v \cos \alpha_v = \gamma, \quad \sum \cos sz_v \sin \alpha_v = \sigma,$$

so hat man:

$$E = -2n \sin p (C\gamma - S\sigma) + 2n \cos p (S\gamma + C\sigma);$$

hieraus ergibt sich sofort die Intensität in einem beliebigen Punkte des Bildes:

$$M^2 = 4n^2 (C^2 + S^2) (\gamma^2 + \sigma^2),$$

wo  $C^2 + S^2$  der Intensitätsausdruck für ein einziges Schirmchen ist. Besitzen die Projectionen der Körperchen einen Mittelpunkt, dessen Coordinaten alsdann  $x_v, y_v$  sind, so ist das Doppelintegral  $S = 0$ , weil es sich über eine Figur erstreckt, in deren Mittelpunkt seine Coordinaten anfangen und sich deshalb seine Elemente paarweise gegenseitig aufheben. Man hat alsdann noch einfacher:

$$M^2 = 4n^2 C^2 (\gamma^2 + \sigma^2).$$

Hierin ist:

$$\gamma^2 + \sigma^2 = \sum \sum \cos sz_v \cos sz_\mu \cos \alpha_v \cos \alpha_\mu \\ + \sum \sum \cos sz_v \cos sz_\mu \sin \alpha_v \sin \alpha_\mu \\ = \sum \sum \cos sz_v \cos sz_\mu \cos (\alpha_v - \alpha_\mu).$$

Ist  $h$  die Anzahl der vorhandenen Körperchen, so besteht diese Doppelsumme aus  $h^2$  Gliedern, welche sich aus dem allgemeinen Gliede ergeben, wenn man in demselben statt der Indices  $v, \mu$  alle Variationen der zweiten Classe mit Wiederholungen aus den Zahlen 1 bis  $h$  einsetzt. Sondert man die  $h$  Glieder, in welchen  $\mu = v$  ist, von den  $h(h-1)$  übrigen ab und bedenkt, dass von den letzteren je zwei einander gleich sind, so kann man auch schreiben:

$$\gamma^2 + \sigma^2 = \sum \cos^2 sz_v + 2 \sum \sum \cos sz_v \cos sz_\mu \cos (\alpha_v - \alpha_\mu),$$

wo in der Doppelsumme als Indices  $\nu, \mu$  die Combinationen der zweiten Classe ohne Wiederholungen aus den Zahlen 1 bis  $h$  zu nehmen sind.

Nimmt man mit Verdet an, dass die letztere Summe, welche aus zahlreichen Gliedern besteht, deren Werthe zwischen  $-1$  und  $+1$  unregelmässig vertheilt sind, gegenüber der ersteren, welche aus lauter positiven Gliedern zusammengesetzt ist, als verschwindend klein anzusehen sei, so kann man statt  $\gamma^2 + \sigma^2$  setzen:

$$\sum \cos^2 sz_\nu = \frac{1}{4} \sum (1 + \cos 2sz_\nu).$$

Diese Summe kann, wie ich früher<sup>1)</sup> gezeigt habe, wenn  $e_1$  die kleinste,  $e_2$  die grösste vorkommende Entfernung der beugenden Körperchen vom Spiegel bedeutet, und zu jeder Entfernung  $z$ , gleichviele solche Körperchen gehören (was der Fall ist, wenn die Körperchen auf einem Rechteck gleichmässig ausgebreitet sind oder einen zur Spiegelebene senkrecht stehenden cylinderförmigen Raum mit zur Spiegelebene parallelen Grundflächen gleichmässig erfüllen), genähert durch das bestimmte Integral:

$$\frac{h}{e_2 - e_1} \int_{e_1}^{e_2} (1 + \cos 2sz) dz = h \left( 1 + \frac{\sin s(e_2 - e_1)}{s(e_2 - e_1)} \cos s(e_2 + e_1) \right),$$

ersetzt werden. Es ergibt sich also, wenn die mittlere Entfernung der Körpertheilchen vom Spiegel:

$$\frac{e_2 - e_1}{2} = e$$

gesetzt wird, die näherungsweise gültige Intensitätsgleichung:

$$M^2 = 2n^2 h C^2 \left( 1 + \frac{\sin s(e_2 - e_1)}{s(e_2 - e_1)} \cos 2se \right).$$

Zu demselben Ausdruck gelangt auch Hr. Exner. Abgesehen von dem Factor  $C^2$ , welcher die Intensität des von einem einzigen Körpertheilchen hervorgebrachten Beugungsbildes darstellt, ergibt sich der nämliche Ausdruck auch aus der Annahme, dass Interferenz nur zwischen den an einem und demselben Körperchen vor und nach der Spiegelung diffus reflectirten (nicht gebeugten) Lichtstrahlen stattfindet, und die

1) Lommel, Wied. Ann. 8. p. 200 1879.

Gesamterscheinung durch Uebereinanderlagerung der einzelnen elementaren Ringsysteme, d. i. durch Summation der Intensitäten der unter sich incohärenten Strahlenbündel entstehe (Diffusionstheorie).

Da sonach Diffusions- und Beugungstheorie das gleiche Verhalten der Staubringe und insbesondere deren Engerwerden fordern, wenn die bestäubte Platte aus der zum Spiegel parallelen Lage in eine geneigte Lage übergeht, so kann aus diesem Verhalten eine Entscheidung zwischen beiden Theorien nicht hergeleitet werden. Der Versuch, den ich hierzu machte<sup>1)</sup>, ist daher nicht stichhaltig. Derselbe stützte sich auf ein Beobachtungsergebnis, welches ich seitdem als unrichtig erkannt habe; die Ringe behalten nämlich nicht, wie ich damals gefunden hatte, beim Drehen der Staubplatte aus der parallelen in die geneigte Lage die gleichen Durchmesser, sondern sie ziehen sich zusammen, ganz in der Weise, wie Hr. Exner angibt. Die Fehlerquelle, welche jenes unrichtige Resultat verschuldete, vermag ich gegenwärtig mit Sicherheit nicht mehr zu eruiren.

In diesem, ein Beobachtungsergebnis betreffenden Punkte hat also Hr. Exner recht. Nicht so in den übrigen, die Theorie betreffenden Punkten.

Von der Grundformel  $E$  meiner Theorie ausgehend, kann man entweder, wie es oben geschehen ist, zuerst die Wirkung eines jeden Schirmchens mit derjenigen seines Spiegelbildes zusammenfassen und dann erst die Wirkungen sämtlicher Paare vereinigen; oder man kann die Resultanten  $E_1$  und  $E_2$  für den ganzen Schirm und sein Spiegelbild zuerst berechnen und dann diese beiden Resultanten zusammensetzen. Das erstere Verfahren ist nur dann durchführbar, wenn die Grenzen der beiden Doppelintegrale  $E_1$  und  $E_2$  als einander gleich angenommen werden können, was namentlich bei einer aus kleinen Körpertheilchen bestehenden unregelmässigen Bestäubung erlaubt ist. Das zweite Verfahren dagegen ist allgemein anwendbar; es gilt für alle Erscheinungen, welche ich unter der Bezeichnung „Interferenz des gebeugten Lichtes“

1) Lommel, Wied. Ann. 8. p. 194—204. 1879.

zusammengefasst habe. Die Grenzen jener beiden Doppelintegrale sind nämlich im allgemeinen voneinander verschieden<sup>1)</sup>, eine Verschiedenheit, welche bei regelmässiger Anordnung der Schirmchen, z. B. wenn ein Gitter sich vor einem Spiegel befindet, nicht ausser acht gelassen werden darf. Sollte die Theorie auch diese Erscheinungen umfassen, so musste schon aus diesem Grunde dem letzten Verfahren der Vorzug gegeben werden.

Da es beim Bilden einer Summe gleichgültig ist, in welcher Reihenfolge deren Glieder addirt werden, so muss das zweite Verfahren nothwendig zu dem nämlichen Resultat führen wie das erste. Es zeichnet sich vor diesem aber dadurch aus, dass es einen klareren Einblick in das Wesen der Erscheinung gestattet.

Nehmen wir an, dass die beugenden Körperchen in einer Ebene liegen, sodass ihre Coordinaten  $x_v, y_v, z_v$  der Gleichung:

$$z_v = e + f x_v + g y_v$$

genügen, so sind, wenn wir die oben eingeführten Bezeichnungen beibehalten:

$$E_1 = -n \Sigma \iint \sin(p - q x'_v - r y'_v - (q - fs)x_v - (r - gs)y_v + se) dx'_v dy'_v,$$

$$E_2 = -n \Sigma \iint \sin(p - q x'_v - r y'_v - (q + fs)x_v - (r + gs)y_v - se) dx'_v dy'_v,$$

die resultirenden Excursionen der von dem ersten und zweiten Schirm (resp. dem Spiegelbild des ersten) nach irgend einer Richtung gebeugten Strahlen. Man kann diese Resultanten leicht in die Form:

$$E_1 = -n \sqrt{C_1^2 + S_1^2} \cdot \sin\left(p + se - \arctg \frac{S_1}{C_1}\right),$$

$$E_2 = -n \sqrt{C_2^2 + S_2^2} \cdot \sin\left(p - se - \arctg \frac{S_2}{C_2}\right)$$

bringen, wo:

$$C_1 = \Sigma'_1 \iint \cos(q x'_v + r y'_v + q_1 x_v + r_1 y_v) dx'_v dy'_v,$$

$$S_1 = \Sigma'_1 \iint \sin(q x'_v + r y'_v + q_1 x_v + r_1 y_v) dx'_v dy'_v$$

ist, und  $C_2, S_2$  sich von diesen Ausdrücken nur dadurch unterscheiden, dass in letzteren  $q_2, r_2$  resp. an der Stelle von  $q_1, r_1$  stehen, während:

1) Lommel, Wied. Ann. 8. p. 209. 1879.

$$\begin{aligned} q - fs &= q_1, & q + fs &= q_2, \\ r - gs &= r_1, & r + gs &= r_2 \end{aligned}$$

gesetzt wurde. Nun ist:

$$\begin{aligned} C_1 &= \sum \cos(q_1 x_v + r_1 y_v) \iint \cos(q x'_v + r y'_v) dx'_v dy'_v \\ &\quad - \sum \sin(q_1 x_v + r_1 y_v) \iint \sin(q x'_v + r y'_v) dx'_v dy'_v \\ &= \sum C_v \cos(q_1 x_v + r_1 y_v) - \sum S_v \sin(q_1 x_v + r_1 y_v) \end{aligned}$$

u. s. w. Sind die beugenden Körperchen unter sich gleich und ähnlich gelagert, so sind alle  $C_v$  unter sich gleich  $= C$ , ebenso alle  $S_v = S$ , und man hat, wenn man:

$$\begin{aligned} \sum \cos(q_1 x_v + r_1 y_v) &= \gamma_1, & \sum \cos(q_2 x_v + r_2 y_v) &= \gamma_2, \\ \sum \sin(q_1 x_v + r_1 y_v) &= \sigma_1, & \sum \sin(q_2 x_v + r_2 y_v) &= \sigma_2 \end{aligned}$$

setzt:

$$\begin{aligned} C_1 &= C\gamma_1 - S\sigma_1, & C_2 &= C\gamma_2 - S\sigma_2 \\ S_1 &= C\gamma_1 + C\sigma_1, & S_2 &= S\gamma_2 + C\sigma_2. \end{aligned}$$

Sind die beugenden Körperchen Kügelchen, und  $x_v, y_v, z_v$  die Coordinaten ihrer Mittelpunkte, so ist  $S = 0$ , und man hat:

$$\begin{aligned} C_1 &= C\gamma_1, & C_2 &= C\gamma_2, \\ S_1 &= C\sigma_1, & S_2 &= C\sigma_2; \end{aligned}$$

für jene beiden Resultanten erhält man demnach:

$$\begin{aligned} E_1 &= -nC\sqrt{\gamma_1^2 + \sigma_1^2} \cdot \sin\left(p + se - \arctg \frac{\sigma_1}{\gamma_1}\right), \\ E_2 &= -nC\sqrt{\gamma_2^2 + \sigma_2^2} \cdot \sin\left(p - se - \arctg \frac{\sigma_2}{\gamma_2}\right). \end{aligned}$$

Wählt man nun als Coordinatenanfang die Projection des Mittelpunktes der (z. B. rechteckigen) Bestäubungsfläche auf die Spiegelebene, so ist jede der Summen:

$$\sigma_1 = \sum \sin(q_1 x_v + r_1 y_v), \quad \sigma_2 = \sum \sin(q_2 x_v + r_2 y_v)$$

gleich Null, weil, wenn die Bestäubung gleichförmig ist und aus sehr zahlreichen Körperchen besteht, zu jedem Körperchen mit den Coordinaten  $x_v, y_v$  ein solches mit den Coordinaten  $-x_v, -y_v$  vorhanden ist. Man hat daher:

$$E_1 = -nC\gamma_1 \sin(p + se), \quad E_2 = -nC\gamma_2 \sin(p - se),$$

oder, wenn man  $N_1$  statt  $C\gamma_1$  und  $N_2$  statt  $C\gamma_2$  schreibt:

$$E_1 = -nN_1 \sin(p + se), \quad E_2 = -nN_2 \sin(p - se).$$

Nun sind:

$$- \sin(p + se) \quad \text{und} \quad - \sin(p - se)$$

die gleichzeitigen Excursionen der durch den Mittelpunkt eines jeden der beiden Schirme nach derselben Richtung gebeugten Elementarstrahlen. Es ergibt sich also der Satz, dass der beim Durchgang durch eine gleichmässige Bestäubung in irgend einer Richtung gebeugte resultirende Strahl die nämliche Phase hat wie der durch den Mittelpunkt der Bestäubungsfläche in derselben Richtung gebeugte Elementarstrahl.

Hr. Exner wendet sich gegen diesen Satz mit folgenden Worten<sup>1)</sup>:

„Der Beweis selbst ist nur angedeutet. Ich kann also den Fehler in demselben nur vermuthen, nicht nachweisen. Doch genügt ein einfaches Beispiel, die Unrichtigkeit dieses Satzes vor Augen zu legen.“

„Nehmen wir einen beugenden Schirm mit zwei punktförmigen Oeffnungen; derselbe besitzt nach Hrn. Lommel's Definition einen Mittelpunkt, welcher in der Mitte zwischen beiden Oeffnungen liegt. Mögen die Lichtstrahlen senkrecht einfallen und der Beugungswinkel so gewählt sein, dass die Wegdifferenz zwischen den von beiden Oeffnungen kommenden Elementarstrahlen einer Wellenlänge gleich sei. Indem sich die beiden Strahlen auf einem unendlich entfernten Schirme oder im Brennpunkte einer Linie treffen, befinden sie sich sowohl untereinander als mit der resultirenden Bewegung in Uebereinstimmung der Phase. Es besteht sonach zwischen dem resultirenden Strahle und dem vom Mittelpunkte des Beugungsschirmes kommenden Strahle eine Phasendifferenz von  $180^\circ$  oder einer halben Schwingungsdauer. Der obige Satz ist also unrichtig.“

So behauptet Hr. Exner. Prüfen wir indess diese Behauptung etwas näher. Ist  $a$  der Abstand der beiden punktförmigen Oeffnungen und  $\psi$  der Beugungswinkel, also  $a \sin \psi$  die Wegdifferenz zwischen den von den beiden Oeffnungen kommenden Elementarstrahlen, so sind, wenn der Kürze wegen die Grösse  $2\pi a \sin \psi / \lambda$  mit  $\delta$  bezeichnet wird:

$$\sin p \quad \text{und:} \quad \sin(p + \delta)$$

1) Exner, Wied. Ann. 9. p. 250. 1880.

die Excursionen derselben, und:

$$\sin p + \sin(p + \delta) \quad \text{oder:} \quad 2 \cos \frac{1}{2} \delta \cdot \sin(p + \frac{1}{2} \delta)$$

die Excursion des resultirenden Strahles, während die Excursion des von der Mitte zwischen den beiden Oeffnungen kommenden Elementarstrahles:

$$\sin(p + \frac{1}{2} \delta)$$

ist. Der resultirende Strahl und der mittlere Elementarstrahl haben also die nämliche Phase, ihre Phasendifferenz ist unter allen Umständen Null. Der obige Satz ist also richtig und gilt nicht nur für zwei punktförmige Oeffnungen, sondern, wie ich oben nochmals gezeigt habe, für eine mit Mittelpunkt versehene gleichmässige Bestäubung. Er gilt ferner, wie ich früher<sup>1)</sup> dargethan, für alle beugenden Oeffnungen, welche einen Mittelpunkt besitzen, d. h. einen Punkt, in welchem alle durch ihn gezogenen Sehnen halbirt werden, so für das Parallelogramm, für jedes regelmässige Vieleck von gerader Seitenzahl, für den Kreis, die Ellipse u. s. w. Da ich diesen elementaren Satz aus der Theorie der Beugung bei meiner früheren Beweisführung als bekannt voraussetzte, so ist es begreiflich, dass Hr. Exner, dem dieser Satz so völlig unbekannt ist, dass er ihn sogar für unrichtig erklärt, eine Lücke empfand.

Allen Fehlschlüssen, durch welche Hr. Exner sich in seinem Irrthum bestärkt, hier im einzelnen nachzugehen, würde zu wenig Interesse darbieten. Es sei nur erwähnt, dass Hr. Exner, nachdem er die Grenzen, innerhalb welcher der für die Phase des resultirenden Strahles massgebende Punkt beim Vorhandensein von nur zwei Staubtheilchen liegen würde, numerisch berechnet hat, diese Grenzen ohne weiteres auch für die Resultante aus dem Zusammenwirken sämmtlicher zahlloser Staubtheilchen annimmt, und nun die aus diesem Missverständniss sich ergebenden ungeheuerlichen Folgerungen meiner Theorie zur Last legt.<sup>2)</sup>

1) Lommel, Schlömilch's Zeitsch. 14. p. 16. 1869.

2) Bei dieser Gelegenheit unternimmt es Hr. Exner, (Wied. Ann. 9. p. 248. 1880), eine von mir angegebene Gleichung „richtig zu stellen.“ Ich hatte nämlich:

Kehren wir nun zu den obigen Gleichungen:

$$E_1 = -nN_1 \sin(p + se), \quad E_2 = -nN_2 \sin(p - se)$$

zurück. Die Aufgabe ist hiermit zurückgeführt auf die Interferenz zweier Strahlen von bekannter Phase, deren Amplituden  $nN_1$  und  $nN_2$  bei schiefer Stellung der Bestäubungsfläche voneinander verschieden sind.

Die Intensität  $M^2$  in irgend einem Punkte des Gesichtsfeldes wird sonach ausgedrückt durch die Formel:

$$M^2 = n^2 (N_1^2 + N_2^2 + 2N_1 N_2 \cos 2se) \quad \text{oder:}$$

$$M^2 = n^2 C^2 (\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + 2\gamma_1 \gamma_2 \cos 2se).$$

Die beiden Amplituden  $N_1 = C\gamma_1$  und  $N_2 = C\gamma_2$  (bei nahezu senkrechter Incidenz ist der Factor  $n$  als Cosinus des Winkels der einfallenden Strahlen mit der Spiegelnormale nur wenig von der Einheit verschieden und kann daher weggelassen werden) haben den Factor  $C$  miteinander gemeinschaftlich. Sind die beugenden Körperchen kugelförmig, ihre Projectionen sonach kreisförmig, so ist, wie ich früher gezeigt habe<sup>1)</sup>:

$$C = R^2 \pi \cdot \frac{J_{(z)}^1}{z}, \quad \text{wo:} \quad z = 2\pi R \cdot \frac{\sin \psi}{\lambda}$$

gesetzt ist,  $R$  den Radius eines Kügelchens,  $\psi$  den Beugungswinkel und  $J_{(z)}^1$  die Bessel'sche Function erster Art mit dem Index Eins vorstellt.

Die Verschiedenheit der beiden Amplituden ist bedingt durch die Factoren  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$ . Dieselben sind bekannte, durch die endlichen Summen:

$$\text{arc tg } \frac{S_1}{C_1} = \frac{1}{2} \varepsilon_1 \pi + K\pi$$

gesetzt, wo  $\varepsilon_1$  eine zwischen  $-1$  und  $+1$  liegende Grösse und  $K$  alle positiven und negativen ganzen Zahlen bedeutet. Diese Gleichung ist richtig, da ja bekanntlich einem beliebig gegebenen Werth der Tangente ein Bogen zwischen  $-\frac{1}{2}\pi$  und  $+\frac{1}{2}\pi$  zugehört, und die Periode der Tangente  $= \pi$  ist. Hr. Exner setzt dafür aus mir unverständlichen Gründen die angeblich „richtig gestellte“, in der That aber unrichtige Gleichung:

$$\text{arc tg } \frac{S_1}{C_1} = \varepsilon_1 \pi + K \cdot 2\pi.$$

1) Lommel, Schlömilch's Zeitschr. 15. p. 145. 1870. Dasselbst p. 164 habe ich auch eine ausführliche Tabelle der Werthe von  $C$  und  $C^2$  mitgetheilt.



$$\gamma_1 = \sum \cos(q_1 x_v + r_1 y_v), \quad \gamma_2 = \sum \cos(q_2 x_v + r_2 y_v)$$

ausgedrückte und für jede individuelle Bestäubung ganz bestimmt gegebene Functionen der Beugungsrichtung. Wären die beiden Bestäubungen voneinander verschieden, so würden diese beiden Summen voneinander unabhängig sein und in keinerlei Beziehung zu einander stehen. Ist aber die eine Bestäubung das Spiegelbild der anderen, so sind sie Werthe einer und derselben Function:

$$\gamma = \sum \cos(q x_v + r y_v)$$

für verschiedene Werthe der Argumente  $q$  und  $r$ , die eine für  $q_1, r_1$ , die andere für  $q_2, r_2$ . Gerade in diesem Umstande, dass  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  oder allgemeiner  $N_1$  und  $N_2$  Werthe einer und derselben Function sind, ist das Wesen der hierhergehörigen Erscheinungen, und insbesondere die Thatsache begründet, dass beim Schrägstellen der Bestäubungsfläche die Newton'schen Staubringe nicht sofort verschwinden. Ist die Bestäubungsfläche dem Spiegel parallel ( $f=0, g=0$ ), so sind die beiden Amplituden einander gleich, weil ihre Argumente einander gleich sind; von diesem gemeinschaftlichen Werthe ausgehend, ändern sie sich stetig, wenn die Platte aus der parallelen in die geneigte Stellung übergeführt wird, indem ihre Argumente  $q_1$  und  $q_2, r_1$  und  $r_2$  auseinanderweichen.

In einer früheren Abhandlung habe ich unter der Ueberschrift: „Beugungserscheinungen, durch mehrere unter sich gleiche Oeffnungen hervorgebracht“, für einen einzigen Schirm die Bedeutung der Factoren  $C$  und  $\gamma$  folgendermassen geschildert<sup>1)</sup>: „Wenn in einem Schirm mehrere unter sich gleiche und ähnlich liegende, aber ganz beliebig gruppirte Oeffnungen vorhanden sind, so liefert jede derselben einen resultirenden Strahl, welchem derselbe Gangunterschied eigen ist, wie einem gewissen, von einem bestimmten Punkte der Oeffnung (z. B. dem Mittelpunkt, wenn ein solcher existirt) ausgehenden Elementarstrahl. Alle diese Resultanten haben für eine und dieselbe Beugungsrichtung auch dieselbe Amplitude, nämlich diejenige, welche jede einzelne Oeffnung für

1) Lommel, Schlömilch's Zeitschr. 14. p. 31. 1869.

diese Strahlenrichtung hervorbringen würde, jede trägt gleichsam das Beugungsbild der einzelnen Oeffnung in sich; würden daher diese Resultanten unter sich nicht interferiren, so müsste auf der Bildfläche die Beugungserscheinung der einzelnen Oeffnung, nur mit erhöhter Lichtstärke, zum Vorschein kommen. Da aber, vermöge der oben erwähnten Gangunterschiede, Interferenz eintritt, so wird dieses Bild nur an solchen Stellen ungeändert bleiben, für welche jene Resultanten in vollem Einklange stehen; an anderen Stellen wird theilweise oder vollständige Vernichtung eintreten. Wir sehen also, dass das von der einzelnen Oeffnung hervorgebrachte Bild, mit proportional dem Quadrate der Oeffnungszahl verstärkter Intensität, die Grundlage der neuen Erscheinung bildet. Die Modificationen, welche es erleidet, hängen nur von den Gangunterschieden der interferirenden Resultanten, d. h. nur von der Gruppierung der Oeffnungen ab, keineswegs aber von der Gestalt derselben.“

Diese nur von der Gruppierung der Oeffnungen oder Körperchen abhängigen Modificationen, welche Hr. Exner mit einer gut gewählten Bezeichnung „Granulation“ nennt, finden ihren Ausdruck in dem Factor  $\gamma$ .

Während bei Parallelstellung die von den beiden Schirmen herrührenden Granulationen identisch sind und zusammenfallen, weichen sie beim Uebergang in die schiefe Lage auseinander und bedingen hierdurch verschiedene Amplituden der beiden nach derselben Richtung gebeugten resultirenden Strahlen.

Da die Werthe von  $\gamma_1^2$  und  $\gamma_2^2$  zwischen 0 und  $h^2$  sich bewegen, so kann der Werth des Verhältnisses  $\gamma_1^2/\gamma_2^2$  zwischen 0 und  $\infty$  liegen. Hierdurch wird der von Hr. Exner<sup>1)</sup> postulierte Werth 160 000:1 noch weit überboten.

Die Verschiedenheit der Amplituden  $N_1 = C\gamma_1$  und  $N_2 = C\gamma_2$  bei schiefer Lage der Bestäubungsfläche kann vernünftiger Weise nicht geleugnet werden. Dass Hr. Exner dies dennoch thut, erklärt sich ohne Zweifel aus dem Umstande, dass er dabei die mittlere Intensität oder die mitt-

1) Exner, Wied. Ann. 17. p. 160. 1882.

lere Amplitude für ein endliches Stückchen des Gesichtsfeldes im Sinne hat. In meiner Theorie aber handelt es sich um zwei parallele Strahlenbündel, die in einem Punkte des Gesichtsfeldes zur Vereinigung kommen.

Mit dieser Auffassung der Intensität als eines Mittelwerthes steht auch die Ansicht des Hrn. Exner im Zusammenhang<sup>1)</sup>, „dass es weder für die Fraunhofer'schen Ringe noch für die Newton'schen Staubringe eine Intensitätsformel im gewöhnlichen Sinne gibt,“ eine Ansicht, welcher ich durchaus nicht beipflichten kann. Diese Intensitätsformel, nämlich:

$$M^2 = n^2 C^2 (\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + 2\gamma_1\gamma_2 \cos 2se)$$

existirt in der That, und zwar für jede gegebene Bestäubung mit aller der Bestimmtheit, welche irgend einer Intensitätsformel in der Theorie der Beugung eigen ist. Dass dieser Ausdruck mühsam zu berechnen sein würde, ändert an dieser Thatsache nichts. Würde man ihn vollständig berechnen, so würde sich ausser den Lycopodium- und den Staubringen auch noch die ganz bestimmte resultirende Granulation ergeben, welche durch die gegebene Bestäubung hervorgebracht wird.

Sieht man jedoch von der genauen Wiedergabe dieser von der besonderen Gruppierung der Körperchen bedingten Modificationen ab, so kann man sich von dem übrigen Inhalt der Formel durch das bereits oben angewendete näherungsweise Verfahren Rechenschaft geben.

Man hat nämlich:

$$\gamma_1 = \sum \cos(qx_v + r_1 y_v) = \sum \cos(qx_v + ry_v - s(fx_v + gy_v)),$$

oder, wenn:

$$qx_v + ry_v = \alpha, \quad fx_v + gy_v = \zeta_v, \quad \text{d. i.:} \quad z_v = e + \zeta_v$$

gesetzt wird:

$$\gamma_1 = \sum \cos(\alpha_v - s\zeta_v) \quad \text{und:} \quad \gamma_2 = \sum \cos(\alpha_v + s\zeta_v);$$

folglich:

$$\gamma_1^2 = \sum \sum \cos(\alpha_v - s\zeta_v) \cos(\alpha_\mu - s\zeta_\mu) \\ = \frac{1}{2} \sum \sum \cos(\alpha_v - \alpha_\mu - s\zeta_v + s\zeta_\mu) + \frac{1}{2} \sum \sum \cos(\alpha_v + \alpha_\mu - s\zeta_v - s\zeta_\mu).$$

1) Exner, Wied. Ann. 9. p. 258. 1880.

Da in der ersteren dieser beiden Summen (weil, wenn  $-\alpha_\mu$  statt  $\alpha_\mu$  gesetzt wird, auch  $-\zeta_\mu$  statt  $\zeta_\mu$  zu setzen ist) neben dem Gliede  $\cos(\alpha_v - \alpha_\mu - s\zeta_v + s\zeta_\mu)$  auch das Glied  $\cos(\alpha_v + \alpha_\mu - s\zeta_v - s\zeta_\mu)$  vorkommt, und ebenso in der zweiten neben dem Gliede  $\cos(\alpha_v + \alpha_\mu - s\zeta_v - s\zeta_\mu)$  auch das Glied  $\cos(\alpha_v - \alpha_\mu - s\zeta_v + s\zeta_\mu)$ , so sind diese beiden Summen einander gleich, und man kann schreiben:

$$\gamma_1^2 = \sum \sum \cos(\alpha_v - \alpha_\mu - s\zeta_v + s\zeta_\mu).$$

Sondert man von dieser aus  $h^2$  Gliedern bestehenden Doppelsumme diejenigen  $h$  Glieder ab, in welchen  $\mu = v$  ist, und bedenkt, dass von den übrigen  $h(h-1)$  Gliedern je zwei einander gleich sind, so erhält man:

$$\gamma_1^2 = \sum 1 + 2 \sum \sum \cos(\alpha_v - \alpha_\mu - s\zeta_v + s\zeta_\mu),$$

oder:

$$\gamma_1^2 = h + 2 \sum \sum \cos(\alpha_v - \alpha_\mu - s\zeta_v + s\zeta_\mu).$$

Ebenso findet man:

$$\gamma_2^2 = h + 2 \sum \sum \cos(\alpha_v - \alpha_\mu + s\zeta_v - s\zeta_\mu),$$

wo nun in den Doppelsummen als Indices  $v, \mu$  sämtliche Combinationen der zweiten Classe ohne Wiederholungen aus den Zahlen 1 bis  $h$  anzuwenden sind.

Hiernach zerfällt jeder Ausdruck  $\gamma^2$  in zwei Theile, deren ersterer, wie auch die Gruppierung der  $h$  Körperchen sich ändern mag, unverändert  $= h$  bleibt, während der zweite Theil, indem er auf dem durch  $h$  vorgestellten gleichmässigen Lichtgrunde Licht auf- oder abträgt, die sogenannte Granulation hervorbringt. Will man daher diese Modification des Bildes ausser acht lassen, so hat man obige Doppelsummen gleich Null zu setzen und kann nun  $2h$  statt  $\gamma_1^2 + \gamma_2^2$  schreiben.

Es ist ferner:

$$\begin{aligned} 2\gamma_1\gamma_2 &= 2 \sum \sum \cos(\alpha_v - s\zeta_v) \cos(\alpha_\mu + s\zeta_\mu) \\ &= \sum \sum \cos(\alpha_v - \alpha_\mu - s\zeta_v - s\zeta_\mu) + \sum \sum \cos(\alpha_v + \alpha_\mu - s\zeta_v + s\zeta_\mu), \end{aligned}$$

oder, da diese beiden Summen aus demselben Grunde wie oben einander gleich sind:

$$2\gamma_1\gamma_2 = 2 \sum \sum \cos(\alpha_v - \alpha_\mu - s\zeta_v - s\zeta_\mu).$$

Sondert man aus dieser Doppelsumme wieder die  $h$  Glieder ab, in welchen  $\mu = v$  ist, so ergibt sich:

$$2\gamma_1\gamma_2 = 2 \sum \cos 2s\zeta_v + 4 \sum \sum \cos(\alpha_v - \alpha_\mu - s\zeta_v - s\zeta_\mu),$$

wo wiederum nur der zweite Theil mit der Gruppierung der Körperchen sich ändert, während der erste Theil den hiervon unabhängigen unveränderlichen Bestand des Ausdrucks darstellt. Sieht man daher von der Granulation ab, so kann man  $2\Sigma \cos 2s\zeta_v$  statt  $2\gamma_1\gamma_2$  setzen.

Ist  $e_2$  die grösste,  $e_1$  die kleinste vorkommende Entfernung der beugenden Körperchen vom Spiegel, so ist diese Summe von  $\zeta_v = -\frac{1}{2}(e_2 - e_1)$  bis  $\zeta_v = +\frac{1}{2}(e_2 - e_1)$  zu nehmen. Sie kann, wenn die Bestäubungsfläche rechteckig gestaltet ist, angenähert ersetzt werden durch das bestimmte Integral:

$$\frac{2h}{e_2 - e_1} \int_{-\frac{1}{2}(e_2 - e_1)}^{+\frac{1}{2}(e_2 - e_1)} \cos s\zeta_v \cdot d\zeta_v = h \cdot \frac{\sin s(e_2 - e_1)}{s(e_2 - e_1)}.$$

Setzt man daher letzteren Werth statt  $2\gamma_1\gamma_2$  und  $2h$  statt  $\gamma_1^2 + \gamma_2^2$  in die obige Intensitätsformel ein, so erhält man:

$$M^2 = 2n^2 h C^2 \left( 1 + \frac{\sin s(e_2 - e_1)}{s(e_2 - e_1)} \cos 2se \right),$$

genau wie oben; und damit ist gezeigt, dass man zu demselben Resultate gelangt, mag man die Summation in der einen oder in der anderen Reihenfolge vornehmen.

Bei zwei verschiedenen Bestäubungen, wenn also  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  in gar keiner Beziehung zu einander stehen, erhält man zwar wie oben, wenn man die zu  $\gamma_2$  gehörigen  $\alpha$  und  $\zeta$  mit  $\alpha'$  und  $\zeta'$  bezeichnet:

$$2\gamma_1\gamma_2 = 2\Sigma\Sigma \cos(\alpha_v - \alpha'_\mu - s\zeta_v - s\zeta'_\mu);$$

aus dieser Doppelsumme lässt sich aber nicht mehr wie oben ein von der Gruppierung der Körperchen unabhängiger Bestandtheil ausscheiden, sondern die ganze Summe ist, wenn von der Granulation abgesehen werden soll, als verschwindend zu betrachten. Man erhält daher, wenn  $h$  und  $i$  die zu jeder Bestäubung gehörige Anzahl der Körperchen bedeuten:

$$M^2 = n^2 C^2 (h + i).$$

In diesem Falle entsteht also das System der Newton'schen Staubringe nicht, wohl aber das der Lycopodiumringe. Die Behauptung des Hrn. Exner<sup>1)</sup>, dass nach meiner Theorie

1) Exner, Wied. Ann. 9. p. 256. 1880.

auch zwei voneinander unabhängige Bestäubungen Newton'sche Staubringe hervorbringen müssten, ist demnach unrichtig, wie überhaupt alles, was Hr. Exner gegen meine Theorie einwendet.

Ein Haupteinwand, mit welchem sich Hr. Exner in seiner letzten Publication<sup>1)</sup> vorzugsweise beschäftigt, besteht in Folgendem. Indem Hr. Exner ohne weiteres  $N_1 = N_2$  (und demnach  $\gamma_1 = \gamma_2$ ) setzt<sup>2)</sup>, folgert er, angeblich aus meiner Theorie, in der That aber aus dieser seiner unrichtigen Unterstellung, dass, wenn die Bestäubungsfläche aus der Parallel-lage in die schiefste Lage übergeführt wird, das Phänomen einfach ungeändert bleiben müsste. Diese mir untergeschobene Theorie, mit der ich selbst aber nichts zu thun habe, widerlegt nun Hr. Exner, indem er numerische Werthe daraus ableitet und diese unter der unrichtigen Bezeichnung „nach Lommel's Theorie“<sup>3)</sup> mit beobachteten Werthen zusammenstellt. Die so berechneten Werthe stimmen allerdings mit den Beobachtungen nicht überein; wohl aber thun dies die wirklich nach meiner Theorie berechneten.

Die Theorie des Hrn. Exner, obgleich sie von dem richtigen Grundgedanken der Beugung ausgeht und zu einer Endformel gelangt, welche mit der aus meiner Intensitätsformel durch ein Näherungsverfahren entwickelten identisch ist, ist dennoch verfehlt. Denn sie stützt sich auf den Satz<sup>4)</sup>, „Die von verschiedenen Theilen der Bestäubung kommenden resultirenden Strahlen verhalten sich wie incohärente Strahlen, indem sie ihre Intensitäten summiren“. Dieser Satz ist unrichtig. Das wahre Verhalten wird vielmehr durch folgenden Satz ausgedrückt: Die von verschiedenen Theilen der Bestäubung kommenden resultirenden Strahlen verhalten sich wie cohärente Strahlen, welche mit einander interferiren, indem sich ihre Excursionen summiren. Als Resultat dieser Interferenz ergeben sich die oben beschrie-

1) Exner, Wied. Ann. 17. p. 149. 1882.

2) Exner, Wied. Ann. 11. p. 234. 1880.

3) Exner, Wied. Ann. 17. p. 154. 155. 158. 1882.

4) Exner, Wied. Ann. 11. p. 222. 1880.

benen nur von der Gruppierung der Stäubchen abhängigen Modificationen des Beugungsbildes.

Da Hr. Exner die „Uebereinanderlagerung elementarer Ringsysteme“<sup>1)</sup>, die „Incohärenz der durch verschiedene Stellen der Bestäubung hervorgebrachten Erscheinungen“<sup>2)</sup>, die „einfache Superposition der Ringsysteme“<sup>3)</sup> wiederholt betont, kann wohl kein Zweifel übrig bleiben, dass er jene resultirende Strahlen wirklich für incohärent hält. Er lässt demgemäss mitten im Gange der Entwicklung statt der von der Beugungstheorie geforderten Summirung der Excursionen eine Summirung der Intensitäten eintreten und macht hierdurch seine Theorie zu einem Mittelding zwischen Beugungs- und Diffusionstheorie. Zu einer exacten Endformel gelangt er auf diesem Wege nicht, sondern nur zu jener auch aus meiner Theorie ableitbaren Näherungsformel von bedingter Gültigkeit.

In meiner Theorie dagegen wird der Grundgedanke der Beugung bis zu Ende festgehalten. Sie führt zu dem ganz exacten Intensitätsausdruck:

$$M^2 = n^2 C^2 (\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + 2\gamma_1 \gamma_2 \cos 2se),$$

welcher die Hauptumstände der Erscheinung, nämlich das Vorhandensein der Staubringe, der Lycopodiumringe und der Granulation, mit einem Blicke übersehen lässt. Die näherungsweise Umformung, durch welche man ihm im Falle einer schiefen Bestäubungsebene eine für die Berechnung bequeme Gestalt gibt, wird erst ganz zuletzt an der bereits fertigen Formel vorgenommen. Im Falle der Parallelstellung ist eine solche Umformung gar nicht nothwendig, da die Formel:

$$M^2 = 2n^2 C^2 \gamma^2 (1 + \cos 2se)$$

alsdann unmittelbar anwendbar ist.

Man kann zwar, wie ich eingangs gezeigt habe, auch bei der von Hrn. Exner eingehaltenen Reihenfolge der

1) Exner, Wied. Ann. 4, p. 540. 1878.

2) Exner, Wied. Ann. 11. p. 222. 1880.

3) Exner, Wied. Ann. 17. p. 153. 1882.

Summierung die Beugungstheorie consequent durchführen und zu einer exacten Endformel gelangen. Diese Formel:

$$M^2 = 4n^2 C^2 (\gamma^2 + \sigma^2)$$

lässt aber das Vorhandensein der Staubringe nicht unmittelbar, sondern erst nach Durchführung jener nur angenähert richtigen Umformung hervortreten und entbehrt daher der Durchsichtigkeit, durch welche sich der obige Intensitätsausdruck auszeichnet. Der von mir befolgte Gang der Summierung verdient daher unbedingt den Vorzug.

Die von mir aufgestellte Theorie der Newton'schen Staubringe ist demnach nicht nur in allen Punkten richtig, sondern sie geht auch, bei consequenter Durchführung des Grundgedankens, gerade denjenigen Weg, welcher am unmittelbarsten zur Einsicht in das Wesen dieser Erscheinungen führt.

Hr. Exner schliesst seine Abhandlung<sup>1)</sup> mit einigen gegen meine Theorie gerichteten Sätzen, welche ich hier zum Schlusse wiederholen will, indem ich nur, wo Hr. Exner sagt: „es ist unrichtig“, schreibe: „es ist richtig“.

Es ist richtig, dass der durch eine Bestäubung in irgend einer Richtung gebeugte resultirende Strahl die nämliche Phase hat wie der durch den Mittelpunkt der Bestäubungsfläche gebeugte Elementarstrahl.

Es ist richtig, dass die an der Bestäubungsfläche vor und nach der Reflexion der directen Strahlen in irgend einer Richtung resultirenden gebeugten Strahlen bei der schiefen Stellung der Bestäubungsfläche ungleiche Intensitäten haben.

Es ist richtig, dass das durch die Combination einer Bestäubungsfläche und eines Spiegels hervorgebrachte Phänomen durch die Intensitätsgleichung:

$$M^2 = n^2 (N_1^2 + N_2^2 + 2N_1 N_2 \cos 2se)$$

gegeben ist.

1) Exner, Wied. Ann. 11. p. 236. 1880.



# VII. *Optische Controversen;* von E. Ketteler.

(Schluss.)

## II. Zur Theorie des Ueberganges des Lichtes zwischen absorbirenden isotropen und anisotropen Medien.

Zu der Form, welche ich den vier Grenzbedingungen des Lichtes in meinen letzten Arbeiten<sup>1)</sup> gegeben habe, und welche sich insbesondere durch Verzichtleistung auf das Continuitätsprincip von älteren<sup>2)</sup> unterscheidet, bestimmte mich wesentlich das Verhalten der anisotropen Medien. Wollte ich mich nämlich möglichst enge und möglichst correct an die Fresnel'sche Behandlung derselben anschliessen können, so musste ich bezüglich des Verhältnisses von Strahl und Normale nothwendig zu derjenigen Anschauung gelangen, die man am erstcitirten Orte entwickelt findet. Gegenwärtig indess, wo ich in den nächstfolgenden Paragraphen die herkömmlichen Sätze über die Schwingungsrichtung des doppelt gebrochenen Lichtes offen bekämpfen werde, ist es denn auch möglich geworden, die erwähnten Uebergangsbedingungen als ein einheitliches, zusammengehöriges System direct aus der Elasticitätslehre abzuleiten. Dabei werde übrigens gleich bemerkt, dass sich speciell für den Eintritt des Lichtes in (absorbirende) isotrope Mittel die Identität der bisherigen und jetzigen Grenzbedingungen mit Leichtigkeit erweisen lässt.

Man denke sich zunächst ein einfach brechendes Mittel mit den drei Gleichungen:

$$(I) \begin{cases} m \frac{d^2 \xi}{dt^2} + \sum m' \frac{d^2 \xi'}{dt^2} C' = \epsilon A_2 \xi, & m \frac{d^2 \eta}{dt^2} + \sum m' \frac{d^2 \eta'}{dt^2} C' = \epsilon A_2 \eta, \\ m \frac{d^2 \zeta}{dt^2} + \sum m' \frac{d^2 \zeta'}{dt^2} C' = \epsilon A_2 \zeta \end{cases}$$

mit irgend einem zweiten ähnlichen in ebener Trennungsfläche sich berühren. Die rechten Seiten enthalten die Deformationskräfte des in beiden Medien gleichen inter-

1) Ketteler, Wied. Ann. 3. p. 83. 1878.

2) Wied. Ann. 1. p. 206.

molecularen Aethers, den wir nicht bloß wie bisher als unzusammendrückbar, sondern auch mit Neumann und Kirchhoff<sup>1)</sup> als einem festen elastischen Körper sich analog verhaltend ansehen wollen. Denkt man sich also diesen Aether zerlegt in lauter unendlich kleine Parallelepipeda von der Lage  $x, y, z$ , deren Kanten den Coordinatenachsen parallel sind, so wird sich kraft der letzterwähnten Eigenschaft desselben beispielsweise schreiben lassen:

$$e \Delta_2 \zeta = \frac{dZ_x}{dx} + \frac{dZ_y}{dy} + \frac{dZ_z}{dz},$$

wo die Normalkraft  $Z_x$  und die beiden Tangentialkräfte  $Z_y = Y_x$  und  $Z_z = X_x$  durch die Ausdrücke gegeben sind:

$$(1) \quad \begin{cases} Z_x = B \left[ \frac{d\zeta}{dz} + \beta \left( \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} \right) \right], \\ Y_x = \frac{B}{2} \left( \frac{d\zeta}{dy} + \frac{d\eta}{dz} \right), \quad X_x = \frac{B}{2} \left( \frac{d\zeta}{dx} + \frac{d\xi}{dz} \right), \end{cases}$$

in welchen  $B, \beta$  für jedes Mittel charakteristische Constanten sind.

Und vermöge der angenommenen Incompressibilität wird sein:

$$(II) \quad \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} = 0.$$

Um nun die Grenzbedingungen aufzustellen, die an der Berührungsfläche zweier solcher Mittel zu erfüllen sind, machen wir diese zur  $XY$ -Ebene eines Coordinatensystems, dessen Anfangspunkt wir mit dem Einfallspunkt eines einfallenden Strahles zusammenfallen lassen, und es möge wieder wie früher für das Mittel (1)  $z$  positiv, für das Mittel (2)  $z$  negativ genommen werden. Wir fixiren insbesondere diejenigen beiden Parallelepipeda, welche, das eine im oberen, das andere im unteren Mittel, im Coordinatenanfangspunkt zusammenstossen.

Wegen der Anwesenheit und des Mitschwingens der ponderablen Theilchen sind offenbar die durch die (ungleichen) Schwingungen erzeugten einzelnen Normal- wie Tangentialdrucke zu beiden Seiten der Grenzfläche im allgemei-

1) Kirchhoff, Abhandl. d. Berl. Akad. 1876. p. 57.

nen ungleich. Stellen wir nun nach Kirchhoff<sup>1)</sup> den Grundsatz auf, dass an der Grenzfläche selbst, resp. an den Elementen derselben keine Arbeit geleistet wird, welche als solche für die Wellenbildung verloren ginge, so wird sich diesem Princip, das in seinen Folgen mit dem der Erhaltung der Schwingungsarbeit des Aethers zusammenfällt, in folgender Weise entsprechen lassen. Man hat nämlich die Totalarbeit aller Druckkräfte, denen irgend zwei gleiche, der Trennungsfläche parallele Parallelepipedenflächen von der Lage  $x_1, y_1, z_1 = +c$  im oberen und  $x_2, y_2, z_2 = -c$  im unteren Mittel ausgesetzt sind, für die erwähnten Grenzparallelepipeden von der Lage  $x = 0, y = 0, z = 0$  einander gleich zu setzen.

Versteht man also unter  $d\xi, d\eta, d\zeta$  kleine zusammengehörige Wegelemente, so hätte man die Gleichung:

$$(III) \quad \left\{ \begin{array}{l} (Z_x d\zeta + Y_x d\eta + X_x d\xi)_1 \\ = (Z_x d\zeta + Y_x d\eta + X_x d\xi)_2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}$$

Schreibt man jede Seite derselben unter Einführung der Oscillationsgeschwindigkeiten so:

$$\left( Z_x \frac{d\zeta}{dt} + Y_x \frac{d\eta}{dt} + X_x \frac{d\xi}{dt} \right) dt,$$

so ergibt die Substitution der Ausdrücke (1) unter Zuziehung der Gleichung (II) für den mit 2 multiplicirten eingeklammerten Factor den Werth:

$$2B \frac{d\zeta}{dz} \frac{d\zeta}{dt} + B \left( \frac{d\zeta}{dy} + \frac{d\eta}{dz} \right) \frac{d\eta}{dt} + B \left( \frac{d\zeta}{dx} + \frac{d\xi}{dz} \right) \frac{d\xi}{dt}.$$

Derselbe lässt sich durch gleichzeitiges Addiren und Subtrahiren identischer Glieder in doppelter Weise umformen:

Zunächst erhält man bei Beibehaltung der zweiten Glieder der Klammern:

$$(a) \quad \left\{ \begin{array}{l} B \left( \frac{d\eta}{dz} - \frac{d\zeta}{dy} \right) \frac{d\eta}{dt} + B \left( \frac{d\xi}{dz} - \frac{d\zeta}{dx} \right) \frac{d\xi}{dt} \\ + 2B \left( \frac{d\zeta}{dz} \frac{d\zeta}{dt} + \frac{d\zeta}{dy} \frac{d\eta}{dt} + \frac{d\zeta}{dx} \frac{d\xi}{dt} \right). \end{array} \right.$$

1) Kirchhoff, l. c. p. 74. Vgl. auch Glazebrook, Proc. of the Cambridge Phil. Soc. 3. p. 330. 1880 und 4. p. 155. 1881.

Dagegen bei Beibehaltung der ersten Glieder:

$$(b) \quad \left\{ \begin{array}{l} B \left( \frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\eta}{dz} \right) \frac{d\eta}{dt} + B \left( \frac{d\zeta}{dx} - \frac{d\xi}{dz} \right) \frac{d\xi}{dt} \\ + 2B \left( \frac{d\zeta}{dz} \frac{d\zeta}{dt} + \frac{d\eta}{dz} \frac{d\eta}{dt} + \frac{d\xi}{dz} \frac{d\xi}{dt} \right). \end{array} \right.$$

Sofern nun das letzte Glied des Ausdrucks (a) in Rücksicht auf Gleichung (II) verschwindet, so erhält sonach die Uebergangsbedingung die Form:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} B_1 \left( \frac{d\eta_1}{dz} - \frac{d\zeta_1}{dy} \right) \frac{d\eta_1}{dt} + B_1 \left( \frac{d\xi_1}{dz} - \frac{d\zeta_1}{dx} \right) \frac{d\xi_1}{dt} \\ = B_2 \left( \frac{d\eta_2}{dz} - \frac{d\zeta_2}{dy} \right) \frac{d\eta_2}{dt} + B_2 \left( \frac{d\xi_2}{dz} - \frac{d\zeta_2}{dx} \right) \frac{d\xi_2}{dt}. \end{array} \right.$$

Und damit identisch ist zufolge Ausdruck (b) die folgende:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} B_1 \left( \frac{d\xi_1}{dz} \frac{d\xi_1}{dt} + \frac{d\eta_1}{dz} \frac{d\eta_1}{dt} + \frac{d\zeta_1}{dz} \frac{d\zeta_1}{dt} \right) \\ = B_2 \left( \frac{d\xi_2}{dz} \frac{d\xi_2}{dt} + \frac{d\eta_2}{dz} \frac{d\eta_2}{dt} + \frac{d\zeta_2}{dz} \frac{d\zeta_2}{dt} \right). \end{array} \right.$$

Diese letztere führt direct zur Fresnel-Neumann'schen Gleichung der lebendigen Kräfte. Was dagegen die zusammengesetzte erstere betrifft, so beachte man, dass die eingeklammerten Grössen die Drehcomponenten sind, um welche die längs der Trennungsfläche liegenden Aetherparallelepipeda in der  $XZ$ , resp.  $YZ$ -Ebene gedreht werden, und dass in isotropen Mitteln in jeder dieser beiden Ebenen selbständige Schwingungen bestehen können.

Acceptiren wir nun für die der Grenzfläche parallelen Verschiebungen die den Anschauungen sowohl Fresnel's wie Neumann's entsprechende Continuitätsforderung, so lässt sich folglich Gleichung (2) in die vier folgenden Einzelbedingungen zerfällen:

$$(IV) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\xi_1}{dt} = \frac{d\xi_2}{dt}, \quad \frac{d\eta_1}{dt} = \frac{d\eta_2}{dt} \\ B_1 \left( \frac{d\xi_1}{dz} - \frac{d\zeta_1}{dx} \right) = B_2 \left( \frac{d\xi_2}{dz} - \frac{d\zeta_2}{dx} \right) \\ B_1 \left( \frac{d\eta_1}{dz} - \frac{d\zeta_1}{dy} \right) = B_2 \left( \frac{d\eta_2}{dz} - \frac{d\zeta_2}{dy} \right) \end{array} \right. \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}$$

Diese Beziehungen, die bei Hinzufügung der beiden Incompressibilitätsbedingungen Gl. (II) und der Gleichung der lebendigen Kräfte (Gl. 3) ein in sich abgeschlossenes System bilden, umfassen zugleich die speciellen Reflexionstheorien Fresnel's wie Neumann's.

Neumann (und mit ihm Kirchhoff), der nur absolut durchsichtige dispersionslose Mittel behandelt, setzt:

$$\zeta_1 = \zeta_2, \quad B_1 \geq B_2$$

und leitet aus ersterer Forderung bezüglich der zweiten ab:  $B_1 : B_2 = n_1^2 : n_2^2$ .

Mit Fresnel dagegen nehmen wir fortan für Mittel von beliebiger Durchsichtigkeit und Dispersion:

$$\zeta_1 \geq \zeta_2, \quad B_1 = B_2.$$

Wenn ich freilich in meinen letzten Arbeiten die beiden Bedingungen der Continuität durch die beiden folgenden:

$$(IV_0) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 \frac{d\zeta_1}{dz} = \alpha_2 \frac{d\zeta_2}{dz}, \quad B_1 \left( \frac{d\eta_1}{dx} - \frac{d\xi_1}{dy} \right) = B_2 \left( \frac{d\eta_2}{dx} - \frac{d\xi_2}{dy} \right) \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

ersetzen zu müssen glaubte, so stimmte doch dieses zweite System, wie bereits eingangs erwähnt ist, für absorbirende isotrope Mittel ( $\alpha=1$ ) und bei äusserer Spiegelung (im Weltäther) in seinen Resultaten mit dem obigen überein. Ebenso bleibt die frühere Rechnung<sup>1)</sup> für den vollständigen Durchgang des Lichtes durch eine planparallele Platte ohne alle Einschränkung bestehen.

Bei dem directen Lichtübergang zwischen aneinander grenzenden absorbirenden Mitteln ist, wie ich gezeigt habe<sup>2)</sup>, neben der „Propagationsnormale“ eine „Extinctionsnormale“ zu unterscheiden, und sowie die erstere nach bestimmten Gesetzen gespiegelt und gebrochen wird, so auch die letztere. Ich habe diese Gesetze dahin ausgesprochen<sup>3)</sup>, dass die gespiegelte Extinctionsnormale mit der einfallenden und dem Lothe in gleicher Ebene liegt, und Spiegelungs- und Einfallswinkel gleich sind, und dass die gebrochene Extinctionsnor-

1) Ketteler, Wied. Ann. **3**. p. 290. 1878.

2) Ketteler, Wied. Ann. **7**. p. 107. 1879.

3) l. c. p. 111.

male stets in die Richtung des Lothes hineinfällt. Wenn Hr. Lommel<sup>1)</sup> auf diese Verhältnisse zurückkommt und dabei das letzterwähnte Gesetz missverständlich durch ein anderes zu ersetzen sucht, so sind seine Ausführungen nicht haltbar.

### III. Die Doppelbrechung. Nachweis, dass die Schwingungen senkrecht stehen auf der Strahlrichtung.

Es wird für diese Materie nothwendig sein, einige Begriffsbestimmungen vorherzuschicken. Wir unterscheiden dabei zwischen den Gesetzen der inneren Fortpflanzung und zwischen dem Verfahren, den einem gegebenen äusseren Schwingungszustande entsprechenden inneren zu finden, und stellen zugleich die beiden hier möglichen Auffassungsweisen einander gegenüber.

1. Nach der von Kirchhoff<sup>2)</sup> fortgebildeten Theorie Neumann's liegen die Schwingungen genau in der Wellenebene als der Ebene gleicher Phasen, und die Bewegung pflanzt sich gemäss der theoretischen Fundamentalformel (der Geschwindigkeitsfläche der Wellennormalen):

$$\frac{v^2}{\omega_x^2 - \omega^2} + \frac{v^2}{\omega_y^2 - \omega^2} + \frac{v^2}{\omega_z^2 - \omega^2} = 0$$

in der Richtung der Normalen fort. Was den einer gegebenen Normalen sich zuordnenden Strahl betrifft, so hat sich Kirchhoff hier nicht mit der älteren Darstellung, dass es für die Existenzberechtigung des letzteren ausreiche, ihn durch blosser Umhüllung aus vorstehender Fläche abzuleiten, begnügt, sondern die tiefere Wesenheit des Strahles durch eine eingehende mechanische Betrachtung begründet. Ihm zufolge gelangt man zum Strahlbegriff mittelst der Erwägung, dass der Erfahrung zufolge die Lichtbewegung auf der einen Seite einer Ebene bestehen kann, während auf der anderen Ruhe stattfindet, falls nämlich die Ebene dem Strahle parallel ist. Dementsprechend muss die Arbeit des Druckes, die auf die Elemente einer beliebigen, parallel dem Strahle genom-

1) Lommel, Wied. Ann. 16. p. 427. 1882.

2) Kirchhoff, Abh. d. Berl. Akad. 1876. p. 55.

menen Ebene von der einen Seite her ausgeübt wird, in jedem Augenblick verschwinden.

Ueberträgt man diese Theorie auf den Uebergang des Lichtes, so schliesst sich ihr die Huygens'sche Construction in möglichst enger Weise an. Dieselbe ergibt beispielsweise für die extraordinär gebrochenen Schwingungen im Falle senkrechter Incidenz das nebenstehende Bild. (Fig. 1). Die der Trennungsfläche  $TT$  parallel einfallende Welle  $AB$  geht über in die parallel bleibende gebrochene  $A'B'$ , welche sich nach der Normalen  $AN$  mit der Geschwindigkeit  $\omega_n$  verschiebt, wegen der ungleichen Seitendrucke aber in diejenige schiefe Richtung  $AS$  hineingedrängt wird, für welche die Arbeit der Seitendrucke verschwindet.

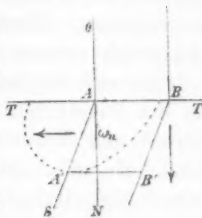


Fig. 1.

Die Schwingungen liegen in der Ebene gleicher Phase  $AB$  (und zwar charakteristischer Weise senkrecht zum Hauptschnitt), und daher verhält sich alles gleich, mag man dieselbe unendlich ausgedehnt nehmen oder auf ein kleines Element beschränken.

Der hiermit gekennzeichneten Neumann-Kirchhoff'schen Auffassung soll jetzt eine andere gleich folgerichtige gegenübergestellt werden. Dieselbe geht aus von der Erfahrung, dass die Strahlrichtung diejenigen Molecülreihen enthält, welche die Schwingungsenergie mit einer durch ihre Beweglichkeit bedingten Geschwindigkeit durch das Mittel hindurch fortleiten, und sie betrachtet daher die Fortpflanzung in der Strahlrichtung nicht als eine durch Normalfortpflanzung in Verbindung mit einem Seitenschub indirect hervorgegangene, sondern als die unmittelbare und unzerlegbare Fortwanderung der Phasen, entsprechend der theoretischen Fundamentalfläche (der Wellenfläche):

$$\frac{u^2}{\frac{1}{\omega_x^2} - \frac{1}{\omega^2}} + \frac{v^2}{\frac{1}{\omega_y^2} - \frac{1}{\omega^2}} + \frac{w^2}{\frac{1}{\omega_z^2} - \frac{1}{\omega^2}} = 0.$$

Dieser Ansicht zufolge stehen denn auch die Schwingungen senkrecht zum Strahle, und zwar verlangt das optisch-

theoretische Gesamtsystem, dass dieselben in dem durch Strahl und Normale gegebenen Hauptschnitt liegen.

Zur Ableitung des vorstehenden Gesetzes genügt die Behandlung des ideellen Falles, dass nämlich im Inneren des Mediums feste Verbindungen hergestellt seien, welche die Aether- und Körpertheilchen zwingen, ihre Oscillationen parallel einer vorgeschriebenen, beliebig ausgedehnten Ebene auszuführen. Dieselben würden dann die gleiche Arbeit in Anspruch nehmen, wie wenn die Beweglichkeit frei wäre, würden sich folglich auch mit der gleichen Geschwindigkeit in der Richtung der Normalen derselben fortpflanzen, und Strahl und Normale wären wie in isotropen Medien identische Begriffe. Ob sich etwa dereinst unter Benutzung gewisser electricischer Vorgänge, wie sie vielleicht die electromagnetische Lichttheorie in Aussicht stellt, die hier gemachte Voraussetzung durch wirkliche Versuche werde realisiren lassen, möge dahingestellt bleiben; für die bisherige experimentelle Optik gibt es solche ideelle, die Schwingungsrichtung fixirenden Kräfte nicht, und bedarf es hier nur eines von der Begrenzung her einwirkenden äusseren Impulses. Um nun trotzdem auf Grund vorstehender allgemeiner Annahmen einmal für die innere Fortpflanzung zu dem durch die letzte Gleichung ausgesprochenen Gesetze zu gelangen, und dabei zugleich andererseits für den Uebergang des Lichtes die erfahrungsmässige Anwendbarkeit der Huygens'schen Construction festhalten zu können, dazu sollen die beiderlei Bedingungen getrennt und möglichst anschaulich besprochen werden.

Wir denken uns zunächst um den Strahl als Axe ein unendlich enges Parallelepipedon (Röhre) construirt und dasselbe durch irgend senkrechte Schnitte in beliebige Elemente zerschnitten, sodass die Schwingungen diesen Basisflächen parallel werden. Dürfte man sich dabei etwa vorstellen, dass das Volumen der Körpertheilchen den Querschnitt gerade ausfülle und zwischen je zwei auf einander folgenden eine Reihe von Aetherschichten, auf deren jeder zahllose Aethertheilchen neben einander Platz finden, enthalten sei, so würde das den Vorgang gut verdeutlichen. Sollte indess die Dich-



tigkeit des inneren Aethers durch grössere Körperräume verkleinert erscheinen<sup>1)</sup>, so mag schon die Annahme genügen, dass der Querschnitt der Parallelepipeda wenigstens gerade die Wirkungssphäre der Atomgruppen eines Gesamtmoleculs ausfülle. Man nehme endlich an, dass die Schwingungen dieser Parallelepipeda durch Hin- und Herschieben der Bestandtheile eines Querschnitts derselben erregt werden; die entstehenden Ebenen gleicher Phase stehen dann gleichfalls auf der Strahl-, resp. Axenrichtung senkrecht. Nachdem man so auf Grund dieser neuen Annahmen, die bei der zugelassenen Beschränkung auf Volumenelemente in allem Wesentlichen mit der obigen ideellen Voraussetzung zusammenfallen, ganz wie dort die bezügliche brechende Kraft, resp. Fortpflanzungsgeschwindigkeit ermittelt hat, denke man sich schliesslich die gesammte Bewegungsmenge einerseits der Aethertheilchen und andererseits der Körpertheilchen in den Schwerpunkten der Querschnitte concentrirt, sodass fortan die mathematische Strahllinie die Bewegungsmenge des ganzen Parallelepipeds in sich einschliesst.

Was nunmehr den Uebergang des Lichtes betrifft, so werden consequenter Weise die Körpertheilchen der Grenzschicht vermöge der Breitendimension sei es ihres Volumens oder der Wirkungssphäre ihrer Atome die ganzen einfallenden wie reflectirten und gebrochenen Wellen in eine Reihe von succedirenden Parallelepipeden zu zerschneiden gestatten, innerhalb deren dann die Schwingungen nach Richtung und Phasengleichheit senkrecht stehen zur Axe. Für die Entstehung der Spiegelung und Brechung genügt eben die Beschränkung auf einzelne Parallelepipeda nicht, sondern es ist wenigstens die Gesammtheit der auf eine kleine endliche Fläche entfallenden in ihrem Nebeneinander ins Auge zu fassen. Auf allen je drei zusammengehörigen Parallelepipeden seien wieder die Bewegungsmengen in ihren Axen

1) Unsere Grundannahme der Identität des intermolecularen und äusseren Aethers bezieht sich freilich im Falle ausgedehnter Körpermassen bloss auf eine unendlich klein genommene Raumeinheit, sodass unbeschadet der relativen Aetherverminderung im endlichen Raum der Quotient  $\epsilon/m = V^2$  seinen constanten Werth behält.

concentrirt. Offenbar lässt sich dann die Huygens'sche Construction anstandslos auf diese „reducirten“ Bewegungsmengen in Anwendung bringen, und je enger der Querschnitt der Parallelepipeda genommen wird, desto näher fällt — natürlich abgesehen von der Schwingungsrichtung — der jetzige Begriff einer endlich ausgedehnten (Integrale) Welle mit dem Neumann-Kirchhoff'schen Begriff derselben zusammen.

Beispielsweise sei wieder für den oben besprochenen speciellen Fall der senkrechten Incidenz  $AB$  (Fig. 2) die einfallende Welle. Dieselbe zerlegt sich diesmal in die Elemente  $Aa, a\beta, \beta\gamma \dots$ , deren jedes die im unteren Medium gelegenen Strahlenparallelepipeda  $AaA'a', a\beta a'\beta' \dots$  mit Schwingungsenergie erfüllt, die sich dann in ihren succedirenden Schwingungszuständen parallel der Richtung  $AS$  verschiebt. Die Oscillationen stehen dabei senkrecht auf  $AS$ , und die Phasen der reducirten Bewegungsmengen

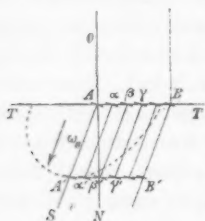


Fig. 2.

bleiben in jedem Augenblick der Richtung  $AB$  parallel, sodass wieder  $A'B'$  eine gebrochene Gesamtwelle darstellt. Bei der jetzigen Auffassung ist also die Normalgeschwindigkeit  $\omega_n$  im Gegensatz zur Strahlgeschwindigkeit  $\omega_s$  eine blosse Hilfsgrösse, welche für die Untersuchung der inneren Fortpflanzungsverhältnisse entbehrlich wird, aber für den Uebergang von aussen her nothwendig bleibt.

Der bisher von mir eingehaltene Standpunkt weicht freilich insofern von der hier dargelegten Anschauung ab, als er sich enger an die Annahme Fresnel's anschliesst und in mehrfacher Hinsicht zwischen jener und der von Neumann die Mitte hält.

Bei meinen ersten Versuchen, die von mir modificirte Fresnel'sche Reflexionstheorie auf anisotrope Mittel auszudehnen, ergab sich allerdings das bemerkenswerthe Resultat, dass, sofern man Continuitätsbedingungen zulassen möchte, solche auf Schwingungsrichtungen senkrecht zum Strahle zu beziehen sein würden. In der Ueberzeugung indess, dass

conform den Sätzen Fresnel's die von diesem angenommenen Normalschwingungen in der Wellenebene selbst liegen, stellte ich letztere als die „factischen“ den nur „virtuellen“ sogenannten Strahlschwingungen gegenüber, liess die Continuitätsforderung fallen und setzte die Gleichheit einer Dilatation nebst der der dritten Drehcomponente an deren Stelle (vgl. Gl. IV<sub>0</sub>).

Das System dieser neuen Uebergangsbedingungen erscheint in der That mit Fresnel's Annahmen verträglich, und es gelang denn auch nicht bloß für durchsichtige, sondern selbst für absorbirende Krystalle die Aufstellung anscheinend correcter Intensitätsformeln, die sich namentlich durch grosse Einfachheit und Symmetrie auszeichnen.

Um freilich dieses Resultat zu erzielen, musste in der betreffenden Untersuchung<sup>1)</sup>, bei welcher sich die „Strahlschwingungen“ bezüglich der Differentialgleichungen der inneren Fortpflanzung als die weitaus brauchbareren erwiesen, bezüglich der Grenzgleichungen ein mehr oder minder willkürlicher Sprung zu Gunsten der „Normalschwingungen“ gemacht werden. Die erwähnte Brauchbarkeit der ersteren bestätigte sich in besonders hohem Maasse in der späteren Abhandlung über elliptisch polarisirende doppeltbrechende Mittel<sup>2)</sup>, und wenn für gewöhnliche anisotrope Medien eine Reduction der einen auf die anderen ohne Schwierigkeit durchzuführen war, so würde eine solche bei den elliptischen Mitteln zu recht verwickelten Ausdrücken führen. Umgekehrt würden in dem Aufsatz über die Interferenzerscheinungen dichroitischer Krystallplatten<sup>3)</sup> die dort abgeleiteten Gesetze an Einfachheit und Uebersichtlichkeit erheblich gewinnen, wenn es gestattet wäre, die Strahlschwingungen unmittelbar als die thatsächlichen zu nehmen.

Wenn endlich das System der Grenzgleichungen (IV<sub>0</sub>) den Fresnel'schen Normalschwingungen genügt, so habe ich doch auch schon mehrfach darauf hingewiesen, dass die Strahlschwingungen wenigstens der durchsichtigen Mittel das-

1) Ketteler, Ber. Berl. 1879. p. 909.

2) Ketteler, Wied. Ann. 16. p. 105. 1882.

3) Ketteler, Wied. Ann. 11. p. 496. 1880.

selbe gleichfalls befriedigen. Da andererseits die Continuitätsgleichungen des Systems (IV) nur Strahlschwingungen zulassen, und die beiden übrigen Gleichungen desselben beiden Systemen gemeinsam sind, so sind sonach die Grenzgleichungen (IV) den Strahlschwingungen als solchen eigenthümlich.

Bedenkt man jetzt, um alles Gesagte zusammenzufassen, dass einmal diese letzteren Uebergangsbedingungen als ein zusammenhängendes Ganzes direct aus der Elasticitätstheorie ableitbar sind, — dass ferner in den anisotropen Medien die Molecüle der Strahlrichtung vermöge des jeweiligen Grades ihrer Beweglichkeit die eigentliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit bedingen und daher die Wellenfläche im Gegensatz zur Geschwindigkeitsfläche der Wellennormalen die natürliche Elementarfläche ist, — dass auch die Theorie der inneren Fortpflanzung eine endlich ausgedehnte Fläche gleiche Phasen nirgends zur nothwendigen Voraussetzung hat, sodass selbst Kirchhoff gerade den Umstand, dass parallel der Strahlrichtung eine plötzliche Discontinuität der Schwingungsbewegung möglich ist, für die Definition des Strahlbegriffes verwerthet, — dass aber doch andererseits die zur Huygens'schen Construction erforderlichen endlichen Flächen mit nahezu gleicher Schärfe und nach demselben Verfahren, mit welchem die Analysis überhaupt operirt, sich aus geraden Strahlparallelepipedern zusammensetzen lassen, — und dass endlich auch die ältere mathematische Behandlung an sogenannten quasitransversalen Schwingungen niemals Anstoss genommen hat, so dürfte es hiernach wohl vorläufig als erwiesen gelten, dass die Schwingungen im Inneren der doppeltbrechenden Mittel senkrecht stehen auf der Strahlrichtung als der Normalen des zugehörigen wahren Wellenelementes und daher schief auf der Normalrichtung der endlich ausgedehnten (scheinbaren) Gesamtwelle.

Erst durch Aufstellung dieses Satzes, der übrigens auch von Anderen schon vermuthungsweise ausgesprochen ist, erhält der Strahl für die neuere Auffassung dieselbe principielle hohe Bedeutung, wie sie die Normale für die Theorie Neumann's hat.

2. Gehen wir jetzt von diesem Standpunkte an die Anwendung der Grenzgleichungen (IV) auf anisotrope Mittel. Von den beiden sich berührenden Medien sei der Einfachheit wegen das erste der Weltäther, das zweite ein irgendwie orientirter absorbirender Krystall. Wir betrachten diesmal die Bewegungen, welche die beiden Grenzparallelepipeda unter dem Einflusse der einfallenden, reflectirten und durchgehenden Strahlen ausführen. Die Winkel dieser Strahlen zu den Coordinatenaxen seien gegeben, ihre Cosinus heissen für die beiden gebrochenen  $u, v, w$ , das Geschwindigkeitsverhältniss des Lichtes in beiden Mitteln sei  $V/\omega_s = \nu$  und der zugehörige Extinctionscoëfficient  $q$ . Die Componenten der gebrochenen Schwingungen haben alsdann die allgemeine Form:

$$(4) \quad \begin{cases} \eta_x = \mathfrak{D}_x e^{\frac{2\pi}{\lambda} q z} \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{\nu(u x + v y + w z)}{\lambda} - \chi_x \right) \\ \eta_y = \mathfrak{D}_y e^{\frac{2\pi}{\lambda} q z} \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{\nu(u x + v y + w z)}{\lambda} - \chi_y \right) \\ \eta_z = \mathfrak{D}_z e^{\frac{2\pi}{\lambda} q z} \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{\nu(u x + v y + w z)}{\lambda} - \chi_z \right). \end{cases}$$

Und was die einfallende und gespiegelte Schwingung betrifft, so möge die  $XZ$ -Ebene mit der Einfallsebene zusammenfallen, der Einfallswinkel heisse  $e$ , und die Amplituden parallel und senkrecht zur Einfallsebene nenne man  $\mathfrak{E}_p$ ,  $\mathfrak{R}_p$ , resp.  $\mathfrak{E}_s$ ,  $\mathfrak{R}_s$ .

Die Gleichungen (IV) geben dann in bekannter Weise folgende Integralformen, in welchen überall Kürze halber  $\nu w = p$  gesetzt ist:

$$(5) \quad \begin{cases} \cos e [\mathfrak{E}_p \sin \varphi + \mathfrak{R}_p \sin(\varphi - \chi_R^p)] = \Sigma \mathfrak{D}_x \sin(\varphi - \chi_x) \\ \mathfrak{E}_p \sin \varphi - \mathfrak{R}_p \sin(\varphi - \chi_R^p) = \Sigma \mathfrak{D}_x [p \sin(\varphi - \chi_x) - q \cos(\varphi - \chi_x)] \\ \quad - \Sigma \mathfrak{D}_z \nu u \sin(\varphi - \chi_z) \\ \mathfrak{E}_s \sin \varphi + \mathfrak{R}_s \sin(\varphi - \chi_R^s) = \Sigma \mathfrak{D}_y \sin(\varphi - \chi_y) \\ \cos e [\mathfrak{E}_s \sin \varphi - \mathfrak{R}_s \sin(\varphi - \chi_R^s)] = \Sigma \mathfrak{D}_y [p \sin(\varphi - \chi_y) - q \cos(\varphi - \chi_y)] \\ \quad - \Sigma \mathfrak{D}_z \nu v \sin(\varphi - \chi_z). \end{cases}$$

Dazu kommen die beiden Incompressibilitätsbedingungen:

$$(6) \quad \begin{cases} \mathfrak{D}_x \nu u \sin(\varphi - \chi_x) + \mathfrak{D}_y \nu v \sin(\varphi - \chi_y) \\ + \mathfrak{D}_z [p \sin(\varphi - \chi_z) - q \cos(\varphi - \chi_z)] = 0. \end{cases}$$

Multiplieirt man für ein sogenanntes uniradiales Azimuth die beiden ersten und letzten der Gl. (5) und addirt die Producte, so entsteht unter Zuziehung der Gl. (6) die Beziehung:

$$\begin{aligned} \cos e [\mathfrak{E}^2 \sin^2 \varphi - \mathfrak{R}_p^2 \sin^2 (\varphi - \chi_p^e) - \mathfrak{R}_s^2 \sin^2 (\varphi - \chi_s^e)] \\ = \mathfrak{D}_x^2 \sin (\varphi - \chi_x) [p \sin (\varphi - \chi_x) - q \cos (\varphi - \chi_x)] \\ + \mathfrak{D}_y^2 \sin (\varphi - \chi_y) [p \sin (\varphi - \chi_y) - q \cos (\varphi - \chi_y)] \\ + \mathfrak{D}_z^2 \sin (\varphi - \chi_z) [p \sin (\varphi - \chi_z) - q \cos (\varphi - \chi_z)]. \end{aligned}$$

Es ist dieselbe, die man bei Benutzung der Gleichung (3) unmittelbar und allgemeiner erhalten haben würde. Wir multipliciren beide Seiten derselben mit  $dt$  und integriren über die Zeiteinheit. Alsdann ergibt sich:

$$\cos e (\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{R}_p^2 - \mathfrak{R}_s^2) = p (\mathfrak{D}_x^2 + \mathfrak{D}_y^2 + \mathfrak{D}_z^2).$$

Hierfür schreibt sich kürzer und in Rücksicht auf die Bedeutung von  $p$  und  $v$ :

$$(7) \quad \begin{cases} V \cos e (\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{R}^2) = \omega \cos r \mathfrak{D}^2 v^2 \\ M (\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{R}^2) = M_D \mathfrak{D}^2 v^2, \end{cases}$$

wo die äquivalenten Volumina durch  $M$ ,  $M_D$  bezeichnet sind. Es ist dies die Fresnel'sche Gleichung der lebendigen Kräfte, die sonach auch für absorbirende Mittel bedingungsweise gültig bleibt.

Wenn nämlich — und zwar sowohl nach Neumann wie nach Fresnel — der Gleichung der lebendigen Kräfte a priori die Form beizulegen ist:

$$M (\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{R}^2) = M_D \mathfrak{D}^2 + M_D \mathfrak{D}_0'^2,$$

so setzt darin Neumann die Totalamplitude  $\mathfrak{D}'$  der Körperteilchen  $= 0$ , während wir letztere mittelst der im ersten Theile dieser Abhandlung (p. 411) aufgestellten Gleichung (23) eliminiren und so vorstehende Fresnel'sche Form erhalten. Ich constatiere bei diesem Anlass meinen Gegnern gegenüber nochmals, dass hier der erste Hauptsatz unserer Dispersionstheorie direct in die Reflexionstheorie hineinragt und in dieser seiner doppelten Bedeutung durch keinen anderen ersetzt werden kann.

Um die Gleichungen (5) praktisch verwendbar zu machen, führe man die complexe symbolische Amplitude ein:

$$\mathfrak{A} (\cos \chi + \sqrt{-1} \sin \chi) = A,$$

und bringe sie nach bekanntem Verfahren auf die Gestalt:

$$(8) \quad \begin{cases} \cos e (\mathfrak{E}_p + \mathfrak{R}_p) = \Sigma D_x \\ \mathfrak{E}_p - \mathfrak{R}_p = \Sigma [D_x (p + q\sqrt{-1}) - D_z v u] \\ \mathfrak{E}_s + \mathfrak{R}_s = \Sigma D_y \\ \cos e (\mathfrak{E}_s - \mathfrak{R}_s) = \Sigma [D_y (p + q\sqrt{-1}) - D_z v v] \\ D_x v u + D_y v v + D_z (p + q\sqrt{-1}) = 0. \end{cases}$$

Betrachtet man  $\mathfrak{E}_p$ ,  $\mathfrak{E}_s$ ,  $e$ , ferner  $v$ ,  $q$ ;  $u$ ,  $v$ ,  $w$  als gegebene Grössen, so genügen diese Gleichungen zunächst für einstrahlige Azimuthe zur expliciten Berechnung der fünf Unbekannten  $\mathfrak{R}_p$ ,  $\mathfrak{R}_s$ ;  $D_x$ ,  $D_y$ ,  $D_z$ .

So lange  $v$  nicht  $= 0$  ist, sind die entstehenden Einzelausdrücke wenig symmetrisch. Um indess von der Form dieser Functionen eine Anschauung zu geben, will ich sie für den Specialfall  $q = 0$  hinschreiben. Man erhält ( $v = n$  gesetzt) zunächst:

$$(9) \quad \begin{cases} D_y = \frac{2}{N} \left\{ \mathfrak{E}_s \left[ n(u^2 + w^2) + \frac{w}{\cos e} \right] - \mathfrak{E}_p \frac{n u v}{\cos e} \right\}, \\ -D_x = \frac{2}{N} \left\{ \mathfrak{E}_s n u v - \mathfrak{E}_p \left[ w + \frac{n(v^2 + w^2)}{\cos e} \right] \right\}, \\ -D_z = \frac{2}{N} \left\{ \mathfrak{E}_s v \left( \frac{1}{\cos e} + n w \right) + \mathfrak{E}_p u \left( 1 + \frac{n w}{\cos e} \right) \right\}, \\ N = \frac{w}{\cos e} (1 + n^2) + \frac{n(v^2 + w^2)}{\cos^2 e} + n(u^2 + w^2). \end{cases}$$

Und daraus weiter:

$$(10) \quad \begin{cases} \mathfrak{R}_s = \frac{\mathfrak{E}_s \left[ \frac{w}{\cos e} (1 - n^2) + n \left( u^2 + w^2 - \frac{v^2 + w^2}{\cos^2 e} \right) \right] - 2 \mathfrak{E}_p \frac{n u v}{\cos e}}{\frac{w}{\cos e} (1 + n^2) + n \left( u^2 + w^2 + \frac{v^2 + w^2}{\cos^2 e} \right)}, \\ \mathfrak{R}_p = \frac{\mathfrak{E}_p \left[ \frac{w}{\cos e} (1 - n^2) - n \left( u^2 + w^2 - \frac{v^2 + w^2}{\cos^2 e} \right) \right] - 2 \mathfrak{E}_s \frac{n u v}{\cos e}}{\frac{w}{\cos e} (1 + n^2) + n \left( u^2 + w^2 + \frac{v^2 + w^2}{\cos^2 e} \right)}. \end{cases}$$

Für  $v = 0$  reduciren sich sonach diese beiden Amplituden des reflectirten Lichtes auf die gemeinsame Form:

$$\mathfrak{R} = \frac{\frac{\cos r}{\cos e} (1 - n^2) \pm n \left( 1 - \frac{\cos^2 r}{\cos^2 e} \right)}{\frac{\cos r}{\cos e} (1 + n^2) + n \left( 1 + \frac{\cos^2 r}{\cos^2 e} \right)} \mathfrak{E},$$

wo  $w = \cos r$  gesetzt ist. Für isotrope Mittel insbesondere, für welche zudem  $n = \sin e / \sin r$  ist, gehen sie nach einigen Reductionen über in:

$$(11) \quad R_s = -\frac{n \cos r - \cos e}{n \cos r + \cos e} \mathfrak{E}_s, \quad R_p = -\frac{n \cos e - \cos r}{n \cos e + \cos r} \mathfrak{E}_p.$$

Die letztere dieser Formen gilt auch für den Hauptschnitt anisotroper Mittel.

Um schliesslich auf absorbirende Krystalle zurückzukommen, so lässt sich denselben neben dem physikalischen Geschwindigkeitsverhältniss  $v$ , ein complexes:

$$(12) \quad n_s = a_s + b_s \sqrt{-1}$$

zuordnen, sofern man neue Variable  $u_s, v_s, w_s$  als complexe Cosinus der Strahlrichtung ansieht und zwischen diesen und den entsprechenden früheren Grössen die Beziehungen aufstellt:

$$vu = nu_s, \quad vv = nv_s, \quad p + q\sqrt{-1} = nw_s, \\ u_s^2 + v_s^2 + w_s^2 = 1.$$

Man erhält daraus für  $n_s$  den Werth:

$$(13) \quad n_s^2 = v^2 \sin^2 r + (p + q\sqrt{-1})^2,$$

sofern ja:  $u^2 + v^2 = 1 - w^2 = \sin^2 r$  gesetzt werden kann. Wird mit Hülfe dieser Definitionen beispielsweise der letzte Intensitätsausdruck (11) umgeformt, so erhält er die Gestalt:

$$(14) \quad R = -\frac{(a + b\sqrt{-1})^2 \cos e - (p + q\sqrt{-1})}{(a + b\sqrt{-1})^2 \cos e + (p + q\sqrt{-1})} \mathfrak{E};$$

sie ist die gleiche wie für isotrope Mittel. Der in einer früheren Abhandlung<sup>1)</sup> aufgestellte abweichende Ausdruck, in welchem alle Variablen statt auf die Strahlrichtung auf die Normalrichtung bezogen werden sollten, enthält dagegen noch einen von Doppelbrechungsvermögen und Richtung abhängigen Factor, mit welchem die zweiten Klammern zu multipliciren sind.

3. Was schliesslich die Abhängigkeit der variablen Brechungsverhältnisse  $v, (p), a$  und der variablen Extinctionsverhältnisse  $q, b$  von der Orientirung der bezüglichlichen Schwingungs-

1) Ketteler, Berl. Ber. 1879. p. 919.



richtung zu den Krystallaxen betrifft, so bedingen bekanntlich erstere die Doppelbrechung, letztere den Pleochroismus. Wir werden nun im Folgenden die Lichtbewegung im Inneren der ponderablen Mittel überhaupt und der anisotropen insbesondere an die Voraussetzung knüpfen, dass bei derselben weder der intermoleculare Aether, noch auch die Körpertheilchen Dichtigkeitsänderungen erleiden, dass also seitens beider die respectiven Bedingungen erfüllt werden:

$$(V) \quad \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} = 0, \quad \frac{d\xi'}{dx} + \frac{d\eta'}{dy} + \frac{d\zeta'}{dz} = 0.$$

Die allgemeinsten Integrale dieser Gleichungen, welche letztere wir nach den Erörterungen auf p. 638 auf beliebig ausgedehnte Wellenebenen beziehen dürfen, haben für die Aethertheilchen die Form:

$$(VI_a) \quad \begin{cases} \xi = \mathfrak{A}_x e^{qE} \cos(\varphi - \delta_x), & \eta = \mathfrak{A}_y e^{qE} \cos(\varphi - \delta_y), \\ \zeta = \mathfrak{A}_z e^{qE} \cos(\varphi - \delta_z). \end{cases}$$

Und für die Körpertheilchen:

$$(VI_b) \quad \begin{cases} \xi' = \mathfrak{A}'_x e^{qE} \cos(\varphi - \delta_x - \Delta_x), \\ \eta' = \mathfrak{A}'_y e^{qE} \cos(\varphi - \delta_y - \Delta_y), \\ \zeta' = \mathfrak{A}'_z e^{qE} \cos(\varphi - \delta_z - \Delta_z), \end{cases}$$

Ausdrücke, in welchen  $E$  und  $\varphi$  die Bedeutung haben:

$$E = \frac{2\pi}{\lambda} (u_0 x + v_0 y + w_0 z), \quad \varphi = 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{v(u x + v y + w z)}{\lambda} \right).$$

Bei Einführung derselben werden die Gleichungen (V):

$$\begin{aligned} & \mathfrak{A}_x \sqrt{v^2 u^2 + q^2 u_0^2} \sin(\varphi - \delta_x - \vartheta_x) \\ & + \mathfrak{A}_y \sqrt{v^2 v^2 + q^2 v_0^2} \sin(\varphi - \delta_y - \vartheta_y) + \dots = 0, \\ & \mathfrak{A}'_x \sqrt{v^2 u^2 + q^2 u_0^2} \sin(\varphi - \delta_x - \vartheta_x - \Delta_x) \\ & + \mathfrak{A}'_y \sqrt{v^2 v^2 + q^2 v_0^2} \sin(\varphi - \delta_y - \vartheta_y - \Delta_y) + \dots = 0, \end{aligned}$$

sofern nämlich abkürzungsweise gesetzt wird:

$$\operatorname{tg} \vartheta_x = \frac{q v_0}{v u}, \quad \operatorname{tg} \vartheta_y = \frac{q v_0}{v v}, \quad \operatorname{tg} \vartheta_z = \frac{q w_0}{v w}.$$

Spaltet man jede derselben in zwei einzelne, so ist die Coexistenz aller vier Gleichungen an die folgenden Bedingungen geknüpft:

$$(15) \begin{cases} \mathfrak{U}_x \sqrt{v^2 u^2 + q^2 u_0^2} + \mathfrak{U}_y \sqrt{v^2 v^2 + q^2 v_0^2} + \mathfrak{U}_z \sqrt{v^2 w^2 + q^2 w_0^2} = 0, \\ \frac{\mathfrak{U}'_x}{\mathfrak{U}_x} = \frac{\mathfrak{U}'_y}{\mathfrak{U}_y} = \frac{\mathfrak{U}'_z}{\mathfrak{U}_z} = \frac{\mathfrak{U}'}{\mathfrak{U}}, \\ \delta_x + \vartheta_x = \delta_y + \vartheta_y = \delta_z + \vartheta_z, \quad \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = \Delta. \end{cases}$$

Dementsprechend sind die Verhältnisse der zusammengehörigen axialen Amplituden der Körper- und Aethertheilchen von der Orientirung unabhängig, und sind die axialen Phasenunterschiede einander gleich. Sofern nun die Schwingungen parallel den Symmetriearien, die hier auch die Coordinatenaxen sein mögen, den Gesetzen der isotropen Medien folgen, für letztere aber dem ersten Theil dieser Arbeit zufolge (p. 408) die Ausdrücke bestehen:

$$\frac{m' \mathfrak{U}'}{m \mathfrak{U}} = \frac{C}{\sqrt{\left(\frac{\lambda^2}{\lambda_m^2} - 1\right)^2 + G^2 \frac{\lambda^2}{\lambda_m^2}}}, \quad \text{tg } A = \frac{G \frac{\lambda}{\lambda_m}}{\frac{\lambda^2}{\lambda_m^2} - 1},$$

so ergibt sich nunmehr:

$$(16) \quad \begin{cases} C_x = C_y = C_z = C, & \lambda_x^2 = \lambda_y^2 = \lambda_z^2 = \lambda_m^2, \\ G_x = G_y = G_z = G^1), \end{cases}$$

sodass auch die Molecularkräfte sich nach Eigenschwingung und Dämpfung für alle Richtungen gleich verhalten.

Zu den nämlichen Bedingungen gelangt man durch Einsetzen der Ausdrücke (VI) in die obigen Gleichungen (I), sodass diese letzteren mit den Incompressibilitätsbedingungen verträglich sind. Die in ihnen vorkommende Constante  $C'$  ist für anisotrope Medien mit der Richtung des Strahles veränderlich und soll nunmehr als Function derselben bestimmt werden.

Es seien zu dem Ende die Coordinatenaxen wieder auch die Symmetriearien des vorläufig als einfach angenommenen

1) Vgl. Voigt, Wied. Ann. 17. p. 468. 1882. — Nichts hindert übrigens, aus zwei heterogenen Molecularqualitäten ein zusammengesetztes Mittel derart herzustellen, dass der Effect der gleiche ist wie bei einem einfachen Mittel mit axial verschiedenen Werthen von  $\lambda_m$  und  $G$ .

ponderablen Gefüges. Denkt man sich die Schwingungen der Aether- und Körpertheilchen (wie in einem durchsichtigen Mittel) zunächst als geradlinig, und legt man den letzteren die Fähigkeit bei, wenigstens für sich nicht bloss transversal, sondern auch longitudinal vibriren zu können, so lässt sich die variable transversale Beschleunigungscomponente der Gleichungen (I) durch eine transversale und eine longitudinale ersetzen. Wir schreiben nämlich:

$$(VII) \quad \begin{cases} m' \frac{d^2 \xi'_t}{dt^2} C' + m' \frac{d^2 \xi'_l}{dt^2} K = m' \frac{d^2 \xi'_t}{dt^2} C'_x, \\ m' \frac{d^2 \eta'_t}{dt^2} C' + m' \frac{d^2 \eta'_l}{dt^2} K = m' \frac{d^2 \eta'_t}{dt^2} C'_y, \\ m' \frac{d^2 \zeta'_t}{dt^2} C' + m' \frac{d^2 \zeta'_l}{dt^2} K = m' \frac{d^2 \zeta'_t}{dt^2} C'_z \end{cases}$$

und verstehen unter  $C'_x$ ,  $C'_y$ ,  $C'_z$  diejenigen constanten Coefficienten, welche sich den axialen Transversalschwingungen in fester und unabänderlicher Weise zuordnen, unter  $K$  endlich eine mit der Richtung veränderliche Grösse. Ohne uns vorläufig bei diesen Beziehungen aufzuhalten, benutzen wir sie sofort zur Umformung der Gleichungen (I). Die Substitution ergibt:

$$(VIII) \quad \begin{cases} m \frac{d^2 \xi}{dt^2} + m' \frac{d^2 \xi'_t}{dt^2} C'_x - m' \frac{d^2 \xi'_l}{dt^2} K = e A_2 \xi, \\ m \frac{d^2 \eta}{dt^2} + m' \frac{d^2 \eta'_t}{dt^2} C'_y - m' \frac{d^2 \eta'_l}{dt^2} K = e A_2 \eta, \\ m \frac{d^2 \zeta}{dt^2} + m' \frac{d^2 \zeta'_t}{dt^2} C'_z - m' \frac{d^2 \zeta'_l}{dt^2} K = e A_2 \zeta \end{cases}$$

Gleichungen, die jetzt, abgesehen von ihrer Herleitung, als neue selbständige Formen behandelt werden sollen.

Die Möglichkeit einer derartigen Deutung, wie sie hier dem dritten Gliede der linken Seite gegeben ist, darf ich wohl ohne Zweifel (neben dem Dispersionsgesetze) als einen ferneren Erfolg des allgemeinen Principes der Wechselwirkung der Schwingungen ansehen.

Bei der Integration dieser Gleichungen lassen wir wieder der Allgemeinheit wegen Extinctions- und Propagationsrichtung nicht zusammenfallen, und indem wir den Aus-

drücken (VI<sub>a</sub>) und (VI<sub>b</sub>) für die Transversalschwingungen die folgenden:

$$(VI_c) \quad \begin{cases} \xi'_i = \mathfrak{A}''_x e^{qE} \cos(\varphi - \delta_x - \Delta_x), \\ \eta'_i = \mathfrak{A}''_y e^{qE} \cos(\varphi - \delta_y - \Delta_y), \\ \zeta'_i = \mathfrak{A}''_z e^{qE} \cos(\varphi - \delta_z - \Delta_z) \end{cases}$$

für die Longitudinalschwingungen hinzufügen, soll fortan in allen gesetzt werden:

$$(17) \quad \begin{cases} \mathfrak{A}_x : \mathfrak{A}_y : \mathfrak{A}_z = \mathfrak{A}U : \mathfrak{A}V : \mathfrak{A}W, \\ \mathfrak{A}'_x : \mathfrak{A}'_y : \mathfrak{A}'_z = \mathfrak{A}'U : \mathfrak{A}'V : \mathfrak{A}'W, \\ \mathfrak{A}''_x : \mathfrak{A}''_y : \mathfrak{A}''_z = \mathfrak{A}''u : \mathfrak{A}''v : \mathfrak{A}''w. \end{cases}$$

Führt man jetzt diese Ausdrücke unter Berücksichtigung der Bedingungen (15) in Gl. (VIII) ein, so geht z. B. die erste über in:

$$\begin{aligned} m \mathfrak{A}U \cos \varphi + m' \mathfrak{A}'U C'_x \cos(\varphi - \Delta) - m' \mathfrak{A}''u K \cos(\varphi - \Delta) \\ = m \mathfrak{A}U[(v^2 - q^2) \cos \varphi + 2 v q \cos \varphi \sin \varphi], \end{aligned}$$

wo  $\varphi$ , welches definirt ist durch:

$$(17_b) \quad \cos \varphi = u u_0 + v v_0 + w w_0,$$

den Winkel zwischen Extinctions- und Propagationsrichtung bedeutet. Sie zerfällt in die beiden folgenden:

$$\begin{aligned} (m' \mathfrak{A}'U C'_x - m' \mathfrak{A}''u K) \cos \Delta &= m \mathfrak{A}U(v^2 - q^2 - 1), \\ (m' \mathfrak{A}'U C'_x - m' \mathfrak{A}''u K) \sin \Delta &= m \mathfrak{A}U 2 v q \cos \varphi, \end{aligned}$$

und man erhält durch Division, resp. Quadrirung und Addition:

$$\operatorname{tg} \Delta = \frac{2 v q \cos \varphi}{v^2 - q^2 - 1},$$

$$\begin{aligned} m' \mathfrak{A}'U C'_x - m' \mathfrak{A}''u K &= m \mathfrak{A}U \sqrt{(v^2 - q^2 - 1)^2 + 4 v^2 q^2 \cos^2 \varphi} \\ &= m' \mathfrak{A}'U C', \end{aligned}$$

sofern in Uebereinstimmung mit Gl. (I) die neue Variable  $C'$  eingeführt wird. Bei Hinzufügung der beiden anderen analogen Beziehungen folgt sonach das System der drei simultanen Gleichungen:

$$(18) \quad \begin{cases} (C'_x - C')U = K \frac{\mathfrak{A}''}{\mathfrak{A}'} u, & (C'_y - C')V = K \frac{\mathfrak{A}''}{\mathfrak{A}'} v, \\ (C'_z - C')W = K \frac{\mathfrak{A}''}{\mathfrak{A}'} w, \end{cases}$$

deren Form für durchsichtige und undurchsichtige Mittel ersichtlich gleich ist. Sind aber die hier vorkommenden Va-

riabeln vom Winkel  $\varrho$  unabhängig, und unterscheiden sich ebenso die Beziehungen:

$$(19) \quad \operatorname{tg} \Delta = \frac{2vq \cos \varrho}{v^2 - q^2 - 1}, \quad \frac{m' \mathfrak{A}' C'}{m \mathfrak{A}} = \sqrt{(v^2 - q^2 - 1)^2 + 4v^2 q^2 \cos^2 \varrho},$$

in nichts von denen der isotropen Mittel, so folgt weiter:

$$(20) \quad \begin{cases} v^2 - q^2 - 1 = a^2 - b^2 - 1 = \frac{m' \mathfrak{A}' \cos \Delta}{m \mathfrak{A}} C' \\ 2vq \cos \varrho = 2ab = \frac{m' \mathfrak{A}' \sin \Delta}{m \mathfrak{A}} C', \end{cases}$$

wo  $a$  und  $b$  die Specialwerthe von  $v$  und  $q$  sind für die Bedingung  $\varrho = 0$ , d. h. für senkrechten Eintritt des Lichtes in einen Krystall.

Setzen wir schliesslich zur Abkürzung:

$$(21) \quad \sqrt{(v^2 - q^2 - 1)^2 + 4v^2 q^2 \cos^2 \varrho} = \sqrt{(a^2 - b^2 - 1)^2 + 4a^2 b^2} = N^2 - 1,$$

so schreiben sich die Gleichungen (VIII), resp. (18) auch so:

$$(22) \quad \begin{cases} [(N_x^2 - 1) - (N^2 - 1)] U = (N^2 - 1) \mathfrak{R} u = N^2 \mathfrak{R}' u \\ [(N_y^2 - 1) - (N^2 - 1)] V = (N^2 - 1) \mathfrak{R} v = N^2 \mathfrak{R}' v \\ [(N_z^2 - 1) - (N^2 - 1)] W = (N^2 - 1) \mathfrak{R} w = N^2 \mathfrak{R}' w. \end{cases}$$

Wir nehmen fortan in undurchsichtigen wie durchsichtigen Mitteln die Richtung  $u, v, w$  senkrecht zur Richtung  $U, V, W$ , sodass zwischen beiden die Bedingung besteht:

$$(23) \quad Uu + Vv + Ww = 0;$$

dieselbe fällt zwar nur in den Specialfällen  $b = \Delta = 0$ , resp.  $\varrho = 0$  mit den allgemeinen Incompressibilitätsbedingungen (V, resp. 15<sub>a</sub>) als solchen zusammen, ist aber bei der Form der Gleichungen (18) und (22) selbstverständlich. Mittelst derselben leitet man aus letzteren nach bekanntem Verfahren diejenige Reihe von Flächen her, welche für  $b = \Delta = 0$  mit den von Fresnel entdeckten übereinstimmen.  $\mathfrak{R}$  ist die trigonometrische Tangente zwischen den Richtungen  $\mathfrak{A}'$  und  $\sqrt{\mathfrak{A}'^2 + \mathfrak{A}''^2}$ .

Construiren wir insbesondere die Fläche:

$$(24) \quad \frac{u^2}{N_x^2 - N^2} + \frac{v^2}{N_y^2 - N^2} + \frac{w^2}{N_z^2 - N^2} = 0,$$

und zwar in der doppelten Weise, dass wir die Radian Vektoren einmal durch  $r^2 = 1/(N^2 - 1)$  und sodann durch  $r^2 = 1/N^2$  bestimmt sein lassen, so repräsentirt die erstere die Verthei-

lung der brechenden Kraft des wellenbildenden Aethers, wie sie im Inneren des Krystalles dem gegebenen Arbeitsverhältniss  $m' \mathcal{U} C / m \mathcal{U}$  unabhängig von der Reibung entspricht. Die zweite bestimmt die Form der elementaren Welle, die sich um einen inneren Punkt herum entwickeln würde, wenn die stattfindende Reibung ohne Aenderung des vorstehenden Arbeitsverhältnisses vernichtet werden könnte; sie ist charakteristisch für die Fortpflanzungsverhältnisse und heisse daher die *reducirte Wellenfläche*.

Für eine gegebene Lage der Trennungsfläche, welche den Lichtübergang von aussen her vermittelt, und bei gegebener äusserer Wellenebene gibt es unendlich viele nebeneinander liegende solcher Flächen mit continuirlich abnehmenden Radien. Sie alle werden berührt durch eine Ebene, die, sei es der Gleichung:

$$\frac{u'^2(N_x^2 - 1)}{N_x^2 - N'^2} + \frac{v'^2(N_y^2 - 1)}{N_y^2 - N'^2} + \frac{w'^2(N_z^2 - 1)}{N_z^2 - N'^2} = 0,$$

oder der Gleichung:

$$(25) \quad \frac{u_n^2 N_x^2}{N_x^2 - N_n^2} + \frac{v_n^2 N_y^2}{N_y^2 - N_n^2} + \frac{w_n^2 N_z^2}{N_z^2 - N_n^2} = 0$$

genügt. Für uns kommt nur die letztere in Betracht, sofern sie für durchsichtige Mittel, d. h. für die Bedingung  $b = A = 0$  mit der Geschwindigkeitsfläche der Wellennormalen zusammenfällt. Der Winkel zwischen den zusammengehörigen Radien der Flächen (24) und (25) ist in diesem Falle der Winkel  $\delta$  zwischen Strahl und Normale, die Berührungsebene ist parallel der Wellenebene als Ebene gleicher Phasen, und es besteht das Brechungsgesetz:

$$\frac{\sin E}{\sin r_n} = \frac{N_s}{\cos \delta} = N_n.$$

Ertheilt man dann den Aether- und Körpertheilchen der betrachteten Strahlrichtung *caeteris paribus* den Phasenunterschied  $A$ , so ändert sich die Fortpflanzungs- (und Absorptions-) Geschwindigkeit, und das Geschwindigkeitsverhältniss  $N_s$  geht über in  $v_s$  (und  $q_s$ ), entsprechend der ersten der beiden aus den Gleichungen (20) ableitbaren Beziehungen:

$$(26) \quad \begin{cases} 2\nu^2 = +(a^2 - b^2) + \sqrt{(a^2 + b^2)^2 + 4a^2b^2 \operatorname{tg}^2 \varrho}, \\ 2q^2 = -(a^2 - b^2) + \sqrt{(a^2 + b^2)^2 + 4a^2b^2 \operatorname{tg}^2 \varrho}. \end{cases}$$

Zugleich aber verschiebt sich die Ebene gleicher Phasen, weil ja alle continuirlich einander folgenden Endpunkte der Strahlen parallel fortrücken, um ein paralleles Stück. Man hat dann bei constant gebliebenem Winkel  $\delta$ , aber irgend einem geänderten Einfallswinkel  $e$ :

$$(27) \quad \frac{\sin e}{\sin r_n} = \frac{\nu_s}{\cos \delta} = \nu_n$$

und sonach schliesslich:

$$(28) \quad \Re' = \operatorname{tg} \delta = \frac{N_x^2 Uu + N_y^2 Vv + N_z^2 Ww}{N^2},$$

welcher Ausdruck nur abhängt von den Beschleunigungsverhältnissen der Aether- und Körpertheilchen, nicht dagegen von der Reibung.

Die durch den Winkel  $\varrho$  mit der Propagationsrichtung (Strahl) zusammenhängende Extinctionsrichtung verhält sich übrigens in anisotropen Medien ganz so wie in isotropen (vgl. p. 635).

Vorstehende sich auf einfache Medien beziehende Betrachtung hier auch auf zusammengesetzte auszudehnen, dürfte um deshalb unnöthig sein, da ich bereits an einem anderen Orte<sup>1)</sup> ausführliche Entwicklungen darüber gegeben und insbesondere die Erscheinung der sogenannten Dispersion der Axen auf unsymmetrische Molecularaggregationen zurückgeführt habe.

### III. Die Totalreflexion der Doppelbrechung.

Nach meinen früheren Untersuchungen<sup>2)</sup> ist bekanntlich die Totalreflexion ein ideeller Grenzfall, der nur ideell durchsichtigen Mitteln zukommt, aber nichtsdestoweniger von einem eigenartigen, absorptionsähnlichen Vorgange begleitet ist. Die vollständige Theorie derselben habe ich früher für isotrope Mittel durchgeführt und möchte sie hier auch für die anisotropen andeuten.

1) Ketteler, Berl. Ber. 1879. p. 903.

2) Ketteler, Carl's Rep. 16. p. 261. 1880. — Beibl. 4. p. 879. 1880.

Was zunächst die Vorfrage betrifft, an welche Bedingungen die Totalreflexion dieser Medien geknüpft sei, so entscheidet sich dieselbe dadurch, dass man die Intensitätsausdrücke (10) in die Bedingungsgleichung:

$$\mathfrak{R}^2 = \mathfrak{R}_p^2 + \mathfrak{R}_s^2 = \mathfrak{E}_p^2 + \mathfrak{E}_s^2 = \mathfrak{E}^2$$

einführt. Man findet so leicht, dass es ganz allgemein genügt: (29<sub>a</sub>)

$$w_s = 0$$

zu setzen, welches auch immer die zugehörigen Werthe von  $v_s$  und  $u_s$ , und welches ebenso die Werthe von  $w_n$  und  $u_n$  der beigeordneten Normale sein mögen. Es muss folglich stets der gebrochene Strahl, nicht dagegen auch die gebrochene Normalrichtung der Trennungsfläche parallel sein. Im Folgenden beschränke ich mich auf die Besprechung der Vorgänge in den Hauptschnitten, für welche  $v_s = v_n = 0$ .

Knüpfen wir zunächst an den Intensitätsausdruck (11), so wird der Werth des Bruches für die Bedingung:

$$\cos r_s = 0, \quad r_s = 90^\circ$$

gleich Eins. Und daher leitet sich für die Grösse des Grenzwinkels ( $e'$ ) aus der bezüglichen einfachen Figur unmittelbar ab:

$$\sin e' = \frac{V}{\omega_s} = n_s.$$

Zu dieser nämlichen Bedingung gelangt man auch durch Benutzung des Brechungsgesetzes der Wellennormalen:

$$\frac{\sin e}{\sin r_n} = \frac{V}{\omega_s \cos \delta} = n_n,$$

sofern man darin  $r_n = r_s \pm \delta$  und hierin  $r_s = 90^\circ$  nimmt. Man erhält so:

$$\frac{\sin e'}{\sin(90 \pm \delta)} = \frac{n_s}{\cos \delta}, \quad \sin e' = n_s.$$

Sehr übersichtlich werden diese Beziehungen, wenn man mit Hülfe der um den Einfallspunkt construirten Huygens'schen Ellipse die zusammengehörigen Strahlen und Normalen zeichnet, welche gleich grossen rechts und links liegenden Grenzwinkeln entsprechen, für welche eben  $\pm e'$  und  $\pm \delta$  sich einander zuordnen.



Ich würde diese Verhältnisse, die schon seit Aufstellung der identischen Reflexionsformel Neumann's klar liegen, hier nicht zur Sprache gebracht haben, wenn nicht vor mehreren Jahren Hr. W. Kohlrausch<sup>1)</sup> seine Versuche über Totalreflexion zwar nach der richtigen allgemeineren Formel ( $\vartheta$  = Winkel zwischen Schwingungs- und Einfallsebene):

$$(29_b) \quad \frac{\sin e'}{\sin [\text{arc ctg} (\text{tg } \delta \cos \vartheta)]} = n_n^2)$$

oder vielmehr nach der für kleine  $\delta$  genügenden Näherungsformel:

$$\frac{\sin e'}{\sin (90 - \delta \cos \vartheta)} = n_n$$

berechnet, aber diese letztere statt aus allgemeingültigen theoretischen Sätzen aus ganz speciellen Erwägungen abgeleitet hätte.

Knüpfen wir endlich an den Intensitätsausdruck (14) für undurchsichtige Mittel und beachten dabei, dass die Verbindung der Gleichungen (20), in welchen  $\varrho = r$  ( $= 90^\circ$ ) zu setzen ist, zu den Formen führt:

$$(30) \quad r^2 - q^2 = a^2 - b^2, \quad r q \cos r = p q = a b.$$

Diese wie Ausdruck (14) unterscheiden sich aber in gar nichts von den entsprechenden der isotropen Mittel, und daher gestaltet sich die weitere Behandlung genau wie bei letzteren.

#### IV. Zur Theorie der bewegten Medien.

Wenn man der gegenwärtigen Auffassung über die Bedeutung des Strablen vor der früher vorgetragenen den Vorzug gibt, so wird dieselbe ausnahmslos auf alle Medien zu übertragen sein, in welchen Strahl und Normale auseinander-treten. Hierhin gehören insbesondere die bewegten Mittel.

In der That habe ich bereits gelegentlich gezeigt<sup>3)</sup>, dass für die Entwicklung der Fortpflanzungsgesetze im Inneren bewegter einfach und doppelt brechender Mittel die Strahlrichtung sich noch aus ganz speciellen, für diese Mittel

1) W. Kohlrausch, Wied. Ann. 6. p. 86 und 7. p. 427. 1879.

2) Folgt aus:  $\cos r_s = \cos \delta \cos r_n - \sin \delta \sin r_n \cos \vartheta = 0$ .

3) Ketteler, Wied. Ann. 7. p. 126. 1879.

charakteristischen Gründen vor der Normalrichtung empfiehlt. Habe ich andererseits die Intensitätsbestimmung des gespiegelten und gebrochenen Lichtes bisher nur immer auf letztere bezogen, so bin ich dazu durch die seit Cauchy üblich gewordene Verquickung der Uebergangsgleichungen mit den Snellius-Descartes'schen Gesetzen veranlasst worden. Erst später habe ich die Unmöglichkeit erkannt, diese letzteren aus den Grenzgleichungen deduciren zu können und demgemäss<sup>1)</sup> bereits den Satz ausgesprochen: „Im allgemeinsten Sinne stellt sich das Huygens'schen Princip als völlig coordinirt zu den Principien der Elasticität.“

Auf eine speciellere Behandlung der bewegten Medien verzichte ich hier. Denn einmal hat sich in Deutschland für den in Rede stehenden Gegenstand kaum je ein nennenswerthes Interesse gezeigt, und andererseits habe ich die Richtung, in welcher die betreffenden Formeln zu ergänzen sind, in einem Buche<sup>2)</sup> bereits angedeutet, und bleiben insbesondere die früheren Entwicklungen über die Drehung der Polarisationssebene des reflectirten Lichtes unter dem Einflusse der Erdbewegung ungeändert für diejenigen Richtungen bestehen, für welche Translation und Strahl zusammenfallen.

Auch die Dispersion der bewegten Mittel lässt sich seit Zulassung, resp. Begründung des constanten Gliedes  $n_\infty$  der Rechnung unterwerfen. Unter der Annahme, dass die Attribute  $\lambda_m$ ,  $G$ ,  $C$ ,  $C'$  von der Translation unbeeinflusst bleiben, stellt sich bei Beleuchtung eines bewegten Prismas durch eine mitbewegte Lichtquelle die Compensation seitens der begleitenden Aberrationen um so vollständiger heraus, als die bezügliche Schwingungsdauer vom Maximum der Absorption entfernter ist.

#### V. Zur Theorie der circular und elliptisch polarisirenden Medien.

Bei diesem Anlass möge kurz erwähnt werden, dass Hr. Lommel in seiner bezüglichen Arbeit<sup>3)</sup> die drei Klassen

1) Ketteler, Wied. Ann. 3. p. 300. 1878.

2) Ketteler, Astron. Undulationsth. Bonn, 1873.

3) Lommel, Wied. Ann. 14. p. 523. 1881 u. 15. p. 378. 1882.

der circular polarisirenden gewöhnlichen Mittel, der magnetischen Mittel und der elliptisch polarisirenden krystallisirten Mittel in der Weise behandelt, dass er gewichtige Eigenschaften derselben, deren innere Begründung recht eigentlich in die Differentialgleichungen hineingehört, äusseren Momenten entnimmt. Nennt man nämlich den Zahlenfactor der die Circularpolarisation der Flüssigkeiten bedingenden Glieder etwa  $g$ , so multiplicirt Hr. Lommel denselben, um zu den magnetischen Mitteln zu gelangen, mit  $\cos \psi$  und für die elliptisch polarisirenden Mittel mit  $\cos^2 \psi$ , wo  $\psi$  den Winkel zwischen Wellennormale und (Schrauben-)Axe bedeutet. Nun lässt sich freilich ersteres und zwar nicht bloß durch Hinweis auf die Erfahrung, sondern auch durch eine selbständige rationelle Untersuchung als stichhaltig darthun. Ob solches auch bezüglich der krystallisirten Mittel zutrifft, dürfte um so mehr zu bezweifeln sein, als bei einer derartigen Behandlung jede Einheitlichkeit der Auffassung ausgeschlossen erscheint.

Lommel findet ferner die Drehung der Polarisations-ebene nicht der ersten, sondern der zweiten Potenz der brechenden Kraft proportional. Das ist bekanntlich empirisch gleichbedeutend mit dem Quadrate der Dichtigkeit, in-dess steht diese Folgerung im Widerspruch mit den bezüglich Biot'schen Gesetzen.

Dass endlich in den früher von mir gegebenen Formeln<sup>1)</sup> für die brechende Kraft der circular und elliptisch polarisirenden Mittel wieder der constante Betrag  $(n_x^2 - 1)$  hinzuzufügen ist, versteht sich nach der betreffenden Entwicklung im ersten Theile dieses Aufsatzes wohl von selbst.

#### VI. Zu den Grenzgleichungen der electromagnetischen Lichttheorie.

Die von Maxwell aufgestellte und besonders von Hrn. Helmholtz fortgebildete electromagnetische Lichttheorie beruht bekanntlich auf den beiden Sätzen, dass erstens die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes gleich sei dem Verhältniss des electrodynamischen und electrostatischen

1) Ketteler, Wied. Ann. 16, p. 86. 1882.  
Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XVIII.

Maasses der Electricität, und dass zweitens das Quadrat des Brechungsindex gleich sein soll dem Verhältniss zweier dielectricischer Polarisationen.

Im übrigen beruhen die theoretischen Entwicklungen dieser Theorie Helmholtz zufolge<sup>1)</sup> auf Vorstellungen, die jede Art von Reibung und folglich auch von Absorption ausschliessen. Ebenso fehlt denselben wenigstens zur Zeit noch der Begriff der Dispersion.

Dem zweiten hier aufgeführten Satze lässt sich seitens der elastischen Optik der zuerst von W. Sellmeier ausgesprochene Satz gegenüberstellen, dass die brechende Kraft ( $n^2 - 1$ ) gleich ist dem Verhältniss der Beschleunigungsarbeiten, resp. der lebendigen Kräfte der Körper- und Aethertheilchen, und dass daher auch das Quadrat des Brechungsindex gleich ist dem Verhältniss zweier Beschleunigungsarbeiten, entsprechend den beiden Gleichungen:

$$n^2 - 1 = \frac{m' \mathfrak{D}'^2}{m \mathfrak{D}^2}, \quad n^2 = \frac{m \mathfrak{D}^2 + m' \mathfrak{D}'^2}{m \mathfrak{D}^2}.$$

Derselbe ist identisch mit dem ersten Hauptsatz der hier vorgetragenen Dispersionstheorie.

Wenn hiernach die Licht- und Electricitätsbewegung nicht blos im reinen Aether, sondern selbst in den aus zusammenschwingenden Aether- und Körpertheilchen bestehenden ponderablen Mitteln derart gleich erscheint, dass man dielectricische Polarisaton und Beschleunigungsarbeit identificiren zu dürfen scheint, und dass man in letzteren die totale dielectricische Polarisaton als aus einer der Aethertheilchen und einer der Körpertheilchen zusammengesetzt betrachten darf, so stehen freilich die von der electromagnetischen Theorie formulirten Grenzbedingungen hiermit in Widerspruch.

Bezüglich letzterer gibt es eine doppelte Richtung; die von Maxwell begründete englische — und als deren Vertreter darf man u. A. die Hrn. Glazebrook<sup>2)</sup> und Fitzgerald<sup>3)</sup>

1) Helmholtz, Wied. Ann. 17. p. 53. 1882.

2) Glazebrook, Phil. Mag. June p. 397. 1881. Vgl. oben p. 633.

3) Fitzgerald, Phil. Trans. 1880.

ansehen — kommt zu dem Resultat, dass die Polarisations-ebene des Lichtes mit der Schwingungsebene zusammenfällt. Dagegen gelangt Hr. Lorentz<sup>1)</sup> auf Grund der Bewegungsgleichungen Helmholtz's zu der Folgerung, dass Polarisations-ebene und Schwingungsebene auf einander senkrecht stehen.

Auf die theoretische Begründung dieser Grenzgleichungen gehe ich hier nicht ein. Lorentz gibt ihnen für zwei beliebige sich berührende Mittel und für Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene folgende Form:

$$\frac{1 + a_1}{\varepsilon_1} = \frac{a_2}{\varepsilon_2}, \quad (1 - a_1) v_1 \cos \alpha_1 = a_2 v_2 \cos \alpha_2.$$

Darin bedeuten 1,  $a_1$ ,  $a_2$  die Amplituden des einfallenden, gespiegelten und gebrochenen Lichtes,  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  Einfallswinkel und Brechungswinkel,  $v_1$  und  $v_2$  die entsprechenden Geschwindigkeiten. Endlich sind  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  die Dielectricitätsconstanten, für welche die Beziehung gilt:

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{v_2^2}{v_1^2} = \frac{n_1^2}{n_2^2} = \frac{1}{n^2}.$$

Denkt man sich als erstes Mittel den Weltäther ( $n_1 = 1$ ), und identificirt man für denselben die elastischen und electromagnetischen Schwingungen, so lassen sich die Grenzgleichungen Hrn. Glazebrook's mit denen von Lorentz folgendermassen zusammenstellen:

	Glazebrook	Lorentz
$\mathcal{E}_s + \mathcal{H}_s =$	$\frac{a_s}{n}$	$\frac{a_s}{n^2}$
$\mathcal{E}_s - \mathcal{H}_s =$	$\frac{a_s \cos r}{n^2 \cos e}$	$\frac{a_s \cos r}{n \cos e}$
$\mathcal{E}_p + \mathcal{H}_p =$	$\frac{a_p \cos r}{n \cos e}$	$\frac{a_p \cos r}{n^2 \cos e}$
$\mathcal{E}_p - \mathcal{H}_p =$	$\frac{a_p}{n^2}$	$\frac{a_p}{n}$

Dabei bemerke ich, dass ich bezüglich letzterer der Kürze halber die von Lorentz durchgeführte Cauchy'sche Form durch die Fresnel'sche ersetzt habe.

1) Lorentz, Schlömilch's Zeitsch. f. M. 22. Beibl. 1. p. 92. 1877.

Ist es zwar seit Cauchy auch in der Optik ausser Uebung gekommen, die bezügliche Gleichung der lebendigen Kräfte hinzuzufügen, so möge sie hier doch mit aufgeführt werden; sie hat in beiden Systemen die identische Form:

$$\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{R}^2 = a^2 \frac{\sin r \cos r}{\sin e \cos e} \frac{1}{n^2}.$$

Wenn es nun meinerseits keinem Zweifel unterliegt, dass die Gleichungen Glazebrook's für die heutige elastische Optik unannehmbar sind, so werden andererseits die von Lorentz gegebenen mit denen der letzteren identisch, sobald man setzt:

$$\frac{a}{n^2} = \mathfrak{D}.$$

Damit wird dann aber die dielectrische Amplitude ( $a$ ) von der elastischen Amplitude ( $\mathfrak{D}$ ), mit welcher sie oben identificirt wurde, begrifflich verschieden.

Angesichts der hier, wie ich meine, hervortretenden principiellen Unversöhnlichkeit der electromagnetischen Theorie in ihrer jetzigen Gestalt mit der elastischen und in Anbetracht dessen, was diese durch Aufnahme des Sellmeier'schen Princip's<sup>1)</sup> gewonnen hat, kann ich in ersterer kein System erkennen, welches, wie kürzlich geäussert worden ist, von manchen Schwierigkeiten der Undulationstheorie frei wäre. Nimmt man in der That von dieser die Dispersion und Absorption und gar noch die Polarisirung fort, dann bleibt doch eigentlich wenig übrig, was zu Schwierigkeiten Anlass geben könnte. Ich hege vielmehr die Ueberzeugung, dass die Geschichte der electricen wie der optischen Schwingungen einst neben dem Namen Faraday's auch den so bescheidenen eines Sellmeier verzeichnen werde.

Die von Kerr entdeckte Drehung der Polarisations-ebene des an einem Magnet gespiegelten Lichtes hat Fitz-

1) Dasselbe datirt vom Jahre 1872, nachdem bereits Boussinesq i. J. 1868 die Möglichkeit eines Zusammenschwingens der Aether- und Körpertheilchen analytisch behandelt und auch Hr. de Saint-Venant mehrfach für dieselbe eingetreten war. Vgl. W. Sellmeier, Pogg. Ann. 145. p. 399 u. 520. 1872; 147. p. 386 u. 525. 1872.

gerald<sup>1)</sup> mittelst der Maxwell'schen Theorie zu begründen gesucht. Wir wollen im Folgenden die Reflexion des Lichtes an einem durchsichtigen Magnet (und auf einen solchen muss sich ja jene Theorie beschränken) von unserem Standpunkt ableiten. Dabei werde vorausgeschickt, dass gemäss einer früheren Entwicklung<sup>2)</sup> in den magnetischen Mitteln die beständigen Schwingungen Kreise sind, und dass für die beiden linearen Componenten derselben die nämlichen Uebergangsbedingungen gelten wie für gewöhnliche Mittel.

Dies angenommen, denke man sich unter irgendwelchem Winkel zur Axe eine spiegelnde Fläche angeschliffen. Wir wollen Hauptschnitt und Einfallsebene zusammenfallen lassen und parallel letzterer eine gegebene Schwingung von der Amplitude  $\mathfrak{E}$  und unter dem Einfallswinkel  $e$  voraussetzen. Man zerlege  $\mathfrak{E}$  in zwei Partialamplituden  $\mathfrak{E}_p$  und  $\mathfrak{E}_s$  und denke sich senkrecht zu beiden zwei entgegengesetzt gleiche Amplituden  $\mathfrak{E}'_s$  und  $\mathfrak{E}''_s$  hinzu, deren Phase um  $90^\circ$  gegen die der ersteren differire. Zwischen den genannten Grössen bestehen sonach die Gleichungen:

$$(31) \quad \mathfrak{E}_p + \mathfrak{E}''_p = \mathfrak{E}, \quad \mathfrak{E}'_s + \mathfrak{E}''_s = 0.$$

$\mathfrak{E}_p$  und  $\mathfrak{E}'_s$  liefern die gespiegelten Amplituden  $\mathfrak{R}_p$  und  $\mathfrak{R}'_s$  und die durchgehenden  $\mathfrak{D}_p$  und  $\mathfrak{D}'_s$ . Diese beiden letzteren seien die Attribute etwa des rechtscircularen Strahles, der sich mit dem Brechungsexponenten  $n' = (\sin e / \sin r')$  im Inneren des Magnets fortpflanzt, und befriedigen daher die Gleichung:

$$(32) \quad \mathfrak{D}_p = \mathfrak{D}'_s.$$

$\mathfrak{E}''_p$  und  $\mathfrak{E}''_s$  liefern ebenso die Grössen  $\mathfrak{R}''_p$  und  $\mathfrak{R}''_s$ , resp.  $\mathfrak{D}''_p$  und  $\mathfrak{D}''_s$ , welche letztere dem linkscircularen Strahle angehören werden, dessen Brechungsindex  $n'' = (\sin e / \sin r'')$  heisse. Sie befriedigen folglich die Gleichung:

$$(33) \quad \mathfrak{D}''_p = -\mathfrak{D}''_s.$$

Nunmehr lassen sich die Amplituden  $\mathfrak{R}$  und  $\mathfrak{D}$  (den Winkel zwischen Strahl und Normale als sehr klein voraus-

1) Fitzgerald, Proc. Roy. Soc. 28. p. 236. 1879. — Beibl. 3. p. 819. 1879.

2) Ketteler, Wied. Ann. 10. p. 123. 1882.

gesetzt) auch als Functionen von  $e$  und  $r$  mittelst der Fresnel'schen Formeln ausdrücken. Man erhält so beispielsweise:

$$(34) \quad \begin{cases} \mathfrak{R}'_p = -\frac{\operatorname{tg}(e-r')}{\operatorname{tg}(e+r')} \mathfrak{E}'_p, & \mathfrak{R}'_s = -\frac{\sin(e-r')}{\sin(e+r')} \mathfrak{E}'_s, \\ \mathfrak{D}'_p = \frac{2 \cos e \sin r'}{\sin(e+r') \cos(e-r')} \mathfrak{E}'_p, & \mathfrak{D}'_s = \frac{2 \cos e \sin r'}{\sin(e+r')} \mathfrak{E}'_s \dots \end{cases}$$

Setzt man die beiden letzteren Ausdrücke in Gl. (32), so schreibt sich dieselbe:

$$\mathfrak{E}_p = \mathfrak{E}'_s \cos(e-r').$$

In analoger Weise gibt Gl. (33):

$$\mathfrak{E}''_p = -\mathfrak{E}''_s \cos(e-r'').$$

Und werden beide mit den Gleichungen (31) combinirt, so erhält man:

$$(35) \quad \mathfrak{E}'_s = -\mathfrak{E}''_s = \frac{\mathfrak{E}}{\cos(e-r') + \cos(e-r'')}.$$

Weiter kommt für die reflectirten Summationsamplituden:

$$(36) \quad \begin{cases} \mathfrak{R}_s = -\left[ \frac{\sin(e-r')}{\sin(e+r')} - \frac{\sin(e-r'')}{\sin(e+r'')} \right] \mathfrak{E}'_s, \\ \mathfrak{R}_p = -\left[ \frac{\sin(e-r')}{\operatorname{tg}(e+r')} + \frac{\sin(e-r'')}{\operatorname{tg}(e+r'')} \right] \mathfrak{E}'_s. \end{cases}$$

Und da entsprechend den Gleichungen:

$$\xi_R = \mathfrak{R}_p \cos \varphi, \quad \eta_R = \mathfrak{R}_s \sin \varphi$$

beider Phasen um  $90^\circ$  differiren, so erzeugt sopach das einfallende lineare Licht eine reflectirte elliptische Schwingung, deren Axen zur Einfallsebene symmetrisch liegen, und deren Bahn bei jedem Polwechsel im entgegengesetzten Sinne durchlaufen wird.

Unserer Theorie zufolge werden demnach bei Erregung eines durchsichtigen Electromagnets lineare Schwingungen wohl depolarisirt, nicht aber gedreht. Anders verhalten sich undurchsichtige Magnete, wie solches speciell für die Coincidenz von Axe und Einfallslloth a. a. O. nachgewiesen ist. Um übrigens vorstehende Formeln auch auf letztere anwendbar zu machen, dazu genügt wieder die Einführung complexer Ausdrücke.

Selbstverständlich gestaltet sich die Rechnung, wenn die gegebene Amplitude des einfallenden Lichtes auf der Ein-



fallsebene senkrecht steht, ganz analog der hier durchgeführten, und endlich erhellet aus der Form der Fortpflanzungsgesetze, dass jede Spur einer Einwirkung verschwindet, wenn das Licht in den Magnet senkrecht zur Axe eintritt.<sup>1)</sup>

Bonn, im November 1882.

### VIII. *Zur Theorie der Lichtstrahlen; von G. Kirchhoff.*

(Aus den Berl. Ber. vom 22. Juni 1882 mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

Die Schlüsse, durch welche man, hauptsächlich gestützt auf Betrachtungen von Huygens und Fresnel, die Bildung der Lichtstrahlen, ihre Reflexion und Brechung, sowie die Beugungserscheinungen zu erklären pflegt, entbehren in mehrfacher Beziehung der Strenge. Eine vollkommen befriedigende Theorie dieser Gegenstände aus den Hypothesen der Undulationstheorie zu entwickeln, scheint auch heute noch nicht möglich zu sein; doch lässt sich jenen Schlüssen eine grössere Schärfe geben. Ich erlaube mir, der Academie Auseinandersetzungen vorzulegen, welche hierauf abzielen, und deren wesentlichen Inhalt ich in meinen Universitätsvorlesungen seit einer Reihe von Jahren vorgetragen habe. Das gleiche Ziel in Bezug auf die Beugungserscheinungen ist inzwischen in einigen veröffentlichten Abhandlungen von den Herren Fröhlich<sup>2)</sup> und Voigt<sup>3)</sup> verfolgt.

§ 1. Es soll angenommen werden, dass das Licht in Transversalschwingungen des Aethers besteht, und der Aether in Bezug auf diese in dem Mittel, in dem die Lichtbewegung betrachtet wird, sich wie ein fester elastischer, isotroper

1) Im ersten Theile dieser Abhandlung sind die irrthümlich stehen gebliebenen Passus p. 418 Z. 17—39 und p. 419 Z. 15—21 zu streichen.

2) Fröhlich, Wied. Ann. 3. p. 376. 1878; 6. p. 414. 1879 u. 15. p. 592. 1881.

3) Voigt, Wied. Ann. 3. p. 532. 1878.

und homogener Körper verhält, auf dessen Theile keine anderen Kräfte wirken, als die durch die relativen Verrückungen hervorgerufenen. Sind  $u, v, w$  die Componenten nach den Coordinatenachsen der Verrückung eines Aethertheilchens, dessen Gleichgewichtslage die Coordinaten  $x, y, z$  hat, zur Zeit  $t$ , so genügt dann jede dieser Grössen der partiellen Differentialgleichung:

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \Delta \varphi,$$

wo  $\Delta$  die Summe der zweiten Differentialquotienten nach  $x, y, z$ , und  $a$  die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes bedeutet. Doch dürfen nicht beliebige Lösungen dieser Gleichung  $u, v, w$  gleichgesetzt werden, da auch:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

sein muss. Sind  $U, V, W$  beliebige Lösungen derselben, so entspricht aber:

$$(2) \quad u = \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x}$$

einer möglichen Lichtbewegung, und umgekehrt gibt es für jede Lichtbewegung Functionen  $U, V, W$ , die diesen Gleichungen genügen.<sup>1)</sup> Es soll im Folgenden unter  $\varphi$  eine der Grössen  $U, V, W$  oder  $u, v, w$  verstanden werden.  $T$  sei die Schwingungsdauer des als homogen vorausgesetzten Lichtes, dann ist jede dieser sechs Grössen eine lineare, homogene Function von:

$$\cos \frac{t}{T} 2\pi \quad \text{und} \quad \sin \frac{t}{T} 2\pi.$$

Als Maass für die Intensität des Lichtes im Punkte  $(x, y, z)$  soll das arithmetische Mittel der Werthe genommen werden, welche:

$$u^2 + v^2 + w^2$$

während der Zeit  $T$  erhält, d. h. wenn man:

$$u = u \cos \frac{t}{T} 2\pi + u' \sin \frac{t}{T} 2\pi, \quad v = v \cos \frac{t}{T} 2\pi + v' \sin \frac{t}{T} 2\pi,$$

$$w = w \cos \frac{t}{T} 2\pi + w' \sin \frac{t}{T} 2\pi$$

setzt,  $\frac{1}{3}(u^2 + u'^2 + v^2 + v'^2 + w^2 + w'^2)$ .

1) Clebsch in Borchard's Journ. 61. p. 195. 1862.

Ist der ganze unendliche Raum von dem betrachteten Medium erfüllt, befindet sich in demselben ein leuchtender Punkt an dem Orte des Punktes 1, dessen Coordinaten  $x_1, y_1, z_1$  sind, und bezeichnet man durch  $r_1$  den Abstand der Punkte  $(x, y, z)$  und  $(x_1, y_1, z_1)$  voneinander, durch  $\lambda$  die Wellenlänge des Lichtes, d. h. das Product  $aT$ , so ist die einfachste Annahme, die man über  $\varphi$  machen kann, und die erlaubt ist, wenn man unter  $\varphi$  eine der drei Grössen  $U, V, W$  versteht:

$$(3) \quad \varphi = \frac{1}{r_1} \cos \left( \frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) 2\pi.$$

Aus diesem Ausdruck von  $\varphi$  kann man einen allgemeinen, der auf denselben Fall sich bezieht, ableiten, indem man zu ihm einen constanten Factor, zu  $t$  eine additive Constante hinzufügt, nach  $x_1, y_1$  oder  $z_1$  einmal oder wiederholt differentiirt und die Summe so gebildeter Ausdrücke nimmt. Das Resultat dieser Operation vereinfacht sich wesentlich, wenn man die Annahme einführt, die für die Optik von fundamentaler Bedeutung ist, dass die Wellenlänge  $\lambda$  als unendlich klein betrachtet werden darf. Man erhält dadurch, indem man nur die Glieder höchster Ordnung berücksichtigt:

$$(4) \quad \varphi = \frac{D}{r_1} \cos \left( \frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) 2\pi + \frac{D'}{r_1} \sin \left( \frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) 2\pi,$$

wo  $D$  und  $D'$  von  $\partial r_1 / \partial x_1, \partial r_1 / \partial y_1, \partial r_1 / \partial z_1$ , oder, was dasselbe ist, von  $\partial r_1 / \partial x, \partial r_1 / \partial y, \partial r_1 / \partial z$ , d. h. von der Richtung der Linie  $r_1$  abhängen, im übrigen aber constant sind. Ausdrücke von derselben Form gelten dann nach (2) auch für  $u, v, w$ ; bezeichnet man die Werthe von  $D$  und  $D'$  für den Fall, dass  $\varphi = u, = v$  oder  $= w$  gesetzt wird, durch  $A, A', B, B'$  oder  $C, C'$ , lässt also diese sechs Zeichen Grössen bedeuten, die von der Richtung der Linie  $r_1$  abhängen, im übrigen aber constant sind, so wird die Intensität des Lichtes im Punkte  $(x, y, z)$ :

$$= \frac{1}{2r_1^2} (A^2 + A'^2 + B^2 + B'^2 + C^2 + C'^2).$$

Dadurch ist ausgesprochen, dass diese Intensität dem Quadrate der Entfernung vom leuchtenden Punkte umge-

kehrt proportional ist, dabei aber mit der Richtung der Linie  $r_1$  in einer Weise variirt, die durch die Bewegung im leuchtenden Punkte bedingt ist.

Ein leuchtender Punkt, wie der gedachte, soll bei den folgenden Betrachtungen als Lichtquelle vorausgesetzt, und es soll untersucht werden, wie das von ihm ausgehende Licht durch einen fremdartigen Körper, der in seine Nähe gebracht ist, modificirt wird. Ein wesentliches Hülfsmittel bei dieser Untersuchung wird ein Satz darbieten, den die Anwendung des Green'schen Satzes auf Functionen, die der für  $\varphi$  aufgestellten Differentialgleichung genügen, ergibt, und der eine Präcisirung und eine Verallgemeinerung des sogenannten Huygens'schen Principes bildet. Hr. Helmholtz hat denselben schon in seiner „Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden“<sup>1)</sup> abgeleitet und seine Wichtigkeit gezeigt; es soll dieser Satz auf einem anderen Wege und in einer anderen Form in dem folgenden Paragraphen entwickelt werden.

§ 2. Sind  $\mathfrak{U}$  und  $\mathfrak{B}$  zwei Functionen von  $x, y, z$ , die mit ihren ersten Differentialquotienten nach  $x, y, z$  innerhalb eines vollständig begrenzten Raumes (der auch aus mehreren getrennten Theilen bestehen kann) eindeutig und stetig sind, ist  $d\tau$  ein Element dieses Raumes,  $ds$  ein Element seiner Oberfläche (die gleichfalls aus getrennten Theilen zusammengesetzt sein kann) und  $N$  die nach dem Inneren des Raumes gerichtete Normale von  $ds$ , so ist nach dem Green'schen Satze:

$$\int ds \left( \mathfrak{U} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial N} - \mathfrak{B} \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial N} \right) = \int d\tau (\mathfrak{B} \Delta \mathfrak{U} - \mathfrak{U} \Delta \mathfrak{B}).$$

Hier setze man  $\mathfrak{U} = \varphi$  und nehme in Bezug auf  $\mathfrak{B}$  zunächst an, dass es auch der Gleichung (1) genügt. Man erhält dann:

$$\begin{aligned} \int ds \left( \varphi \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial N} - \mathfrak{B} \frac{\partial \varphi}{\partial N} \right) &= \frac{1}{a^2} \int d\tau \left( \mathfrak{B} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \varphi \frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial t^2} \right) \\ \text{oder} &= \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial t} \int d\tau \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \mathfrak{B} - \varphi \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} \right). \end{aligned}$$

1) Helmholtz, Borchardt's Journ. 57. p. 1. 1859.

Diese Gleichung multiplicire man mit  $dt$  und integriere zwischen zwei Werthen der Zeit, von denen der eine negativ, der andere positiv ist, und die  $-t'$  und  $t''$  genannt werden mögen. Bei einer gebräuchlichen Bezeichnungsweise ergibt sich dadurch:

$$(5) \int_{-t'}^{t''} dt \int ds \left( q \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial N} - \mathfrak{B} \frac{\partial q}{\partial N} \right) = \frac{1}{a^3} \left[ \int d\tau \left( \mathfrak{B} \frac{\partial q}{\partial t} - q \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} \right) \right]_{-t'}^{t''}.$$

Nun sei:  $\mathfrak{B} = \frac{F(r_0 + at)}{r_0},$

wobei  $r_0$  die Entfernung des Punktes  $(x, y, z)$  von einem beliebig gewählten Punkte, dem Punkte  $o$ , bedeutet und  $F$  eine Function ist, die für jeden endlichen, positiven oder negativen, Werth ihres Arguments verschwindet, nie negativ ist und der Bedingung genügt, dass:

$$(6) \int F(\zeta) d\zeta = 1,$$

wenn die Integration von einem endlichen negativen bis zu einem endlichen positiven Werthe von  $\zeta$  ausgedehnt wird.

Es sei jetzt ein vollständig begrenzter Raum gegeben, der von homogenem Aether erfüllt und frei von leuchtenden Punkten ist;  $s$  sei seine Oberfläche und  $ds$  ein Element derselben. Der Punkt  $o$  werde im Inneren des Raumes angenommen und die Gleichung (5) auf den Raum angewandt, der von jenem übrig bleibt, wenn eine unendlich kleine Kugel, deren Mittelpunkt der Punkt  $o$  ist, ausgeschlossen wird.  $dS$  sei ein Element der Oberfläche dieser Kugel. Es sei  $t'$  so gross gewählt, dass:

$$r_0 - at'$$

für den grössten Werth, den  $r_0$  in der Fläche  $s$ , also überhaupt in dem gedachten Raume, erhält, negativ und endlich ist; unter dieser Bedingung kommen auf der rechten Seite der Gleichung (5) nur Werthe von  $\mathfrak{B}$  und  $\partial \mathfrak{B} / \partial t$  vor, für welche  $r_0 + at$  endlich, positiv oder negativ ist, und welche daher verschwinden. Die Gleichung (5) gibt daher:

$$(7) \int_{-t'}^{t''} dt \int ds \left( q \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial N} - \mathfrak{B} \frac{\partial q}{\partial N} \right) + \int_{-t'}^{t''} dt \int dS \left( q \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial N} - \mathfrak{B} \frac{\partial q}{\partial N} \right) = 0.$$

Das zweite von diesen beiden Integralen lässt sich ausführen. Bezeichnet man durch  $R$  den Radius der unendlich kleinen Kugel, auf die es sich bezieht, und vernachlässigt bei der Berechnung des mit  $dS$  multiplicirten Ausdrucks, was mit  $R^2$  multiplicirt unendlich Kleines gibt, so kann man setzen:

$$\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial N} = -\frac{1}{R^2} F(at), \quad \mathfrak{B} = 0,$$

$$\text{also:} \quad \int dS \left( q \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial N} - \mathfrak{B} \frac{\partial q}{\partial N} \right) = -4\pi q_0 F(at),$$

wo  $q_0$  den Werth von  $q$  für den Punkt  $o$  bedeutet. Da ferner  $F(at)$  nur für unendlich kleine Werthe von  $t$  von Null verschieden und der Gleichung (6) zufolge:

$$\int_{-t'}^{t''} dt F(at) = \frac{1}{a}$$

ist, so wird das zweite Glied der Gleichung (7):

$$-\frac{4\pi}{a} q_0(o),$$

wo  $q_0(o)$  den Werth von  $q_0$  für  $t = 0$  bezeichnet. Auch bei ihrem ersten Gliede lässt sich die Integration nach  $t$  mit Hülfe der Gleichung (6) ausführen. Zunächst hat man:

$$a \int_{-t'}^{t''} dt \mathfrak{B} \frac{\partial q}{\partial N} = a \int_{-t'}^{t''} dt \frac{F(r_0 + at)}{r_0} \frac{\partial q}{\partial N} = \frac{1}{r_0} \frac{\partial q}{\partial N},$$

wo in  $\partial q / \partial N$  nach Ausführung der Differentiation:

$$t = -\frac{r_0}{a}$$

zu setzen ist. Macht man:

$$(8) \quad \frac{\partial q}{\partial N} = f(t),$$

so wird dieser Ausdruck also:

$$\frac{1}{r_0} f\left(-\frac{r_0}{a}\right).$$

Ferner ist:

$$\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial N} = \frac{\partial}{\partial N} \frac{F(r_0 + at)}{r_0} = \frac{\partial}{\partial N} \frac{1}{r_0} F(r_0 + at) + \frac{1}{r_0} \frac{\partial r_0}{\partial N} \frac{1}{a} \frac{\partial F(r_0 + at)}{\partial t};$$

und daher:

$$a \int_{-t'}^{t''} dt \varphi \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial N} = \frac{\partial}{\partial N} \frac{1}{r_0} \varphi \left( -\frac{r_0}{a} \right) + \frac{1}{r_0} \frac{\partial r_0}{\partial N} \int_{-t'}^{t''} \varphi \frac{\partial F(r_0 + at)}{\partial t} dt,$$

wo  $\varphi(-r_0/a)$  den Werth von  $\varphi$  für  $t = -r_0/a$  bedeutet. Formt man das letzte Integral durch partielle Integration um und erwägt, dass die Function  $F$  für jeden endlichen Werth ihres Arguments verschwindet, so findet man denselben Ausdruck:

$$= \frac{\partial}{\partial N} \frac{1}{r_0} \varphi \left( -\frac{r_0}{a} \right) - \frac{1}{a} \frac{1}{r_0} \frac{\partial r_0}{\partial N} \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

wo in  $\partial \varphi / \partial t$  ebenfalls  $t = -r_0/a$  zu setzen ist. Substituirt man diese Resultate in die Gleichung (7) und verlegt zugleich den Anfangspunkt der Zeit so, dass der bisherige Anfangspunkt der Zeitpunkt  $t$  wird, so erhält man:

$$(9) \quad 4\pi \varphi_0(t) = \int ds \left\{ \frac{\partial}{\partial N} \frac{1}{r_0} \varphi \left( t - \frac{r_0}{a} \right) - \frac{1}{a} \frac{1}{r_0} \frac{\partial r_0}{\partial N} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \left( t - \frac{r_0}{a} \right) - \frac{1}{r_0} f \left( t - \frac{r_0}{a} \right) \right\}.$$

Die beiden ersten Glieder des hier mit  $ds$  multiplicirten Ausdrucks lassen sich in das eine:

$$\frac{\partial}{\partial N} \frac{\varphi \left( t - \frac{r_0}{a} \right)}{r_0}$$

zusammenziehen, wo die Differentiation so auszuführen ist, dass nur  $r_0$  als variabel angesehen wird, den Grössen, von denen  $\varphi(t)$  abhängt, aber die Werthe gelassen werden, die ihnen in dem Element  $ds$  zukommen. Man hat hiernach:

$$(10) \quad 4\pi \varphi_0(t) = \int ds \Omega, \quad \text{wo:}$$

$$(11) \quad \Omega = \frac{\partial}{\partial N} \frac{\varphi \left( t - \frac{r_0}{a} \right)}{r_0} - \frac{f \left( t - \frac{r_0}{a} \right)}{r_0},$$

und wo die Function  $f$  durch (8) definirt ist.

Hieraus ist zu schliessen, dass die Bewegung des Aethers in dem von der Fläche  $s$  umschlossenen Raume angesehen werden kann als hervorgebracht von einer Schicht von leuchtenden Punkten in der Fläche  $s$ , da ein jedes von den beiden

Gliedern, aus denen  $\Omega$  zusammengesetzt ist, sich bezeichnen lässt als einem leuchtenden Punkte entsprechend, der am Orte von  $ds$  sich befindet.

Die folgende Betrachtung beweist, dass unter einer gewissen Bedingung, die später immer als erfüllt angenommen werden soll, die Gleichung (10) auch gilt, wenn die leuchtenden Punkte innerhalb des von der Fläche  $s$  umschlossenen Raumes liegen, und der Punkt  $o$  ausserhalb desselben sich befindet; nur muss die Normale  $N$  dann nach aussen gekehrt sein. Man wende in diesem Falle die Gleichung (10) auf den Raum an, der nach innen durch die Fläche  $s$ , nach aussen durch eine unendlich grosse Kugelfläche begrenzt ist, deren Element  $dS$  genannt werden möge. Man erhält dadurch:

$$4\pi\varphi_0(t) = \int ds \Omega + \int dS \Omega.$$

Nun nehme man an, dass bis zu einem gewissen, endlichen Werthe der Zeit überall Ruhe herrsche, sodass für unendlich grosse, negative Werthe von  $t$  überall, also auch an der unendlich grossen Kugel,  $\varphi(t)$  und  $f(t)$  verschwinden. Wählt man den Punkt  $o$  im Endlichen und fasst nur endliche Werthe der Zeit ins Auge, so verschwindet dann  $\Omega$  für jedes Element  $dS$ , weil hier  $t - r_0/a$  negativ unendlich ist; man erhält also die Gleichung (10). Die Beschränkung, dass der Punkt  $o$  im Endlichen liegen und die Zeit endlich sein soll, ist dabei nur eine scheinbare; welches die Lage des Punktes  $o$  und der Werth von  $t$  sein möge, man kann den Radius der Kugel so gross wählen, dass die angestellte Betrachtung ihre Gültigkeit behält.

Wendet man die Gleichung (10) auf zwei geschlossene Flächen an, die einen Theil gemeinsam haben und beide den Punkt  $o$ , aber nicht die leuchtenden Punkte — oder auch die leuchtenden Punkte, aber nicht den Punkt  $o$  — umschliessen, und zieht die Resultate, die man dadurch erhält, voneinander ab, so sieht man, dass das Integral  $\int ds \Omega$ , ausge dehnt über eine geschlossene Fläche, welche weder die leuchtenden Punkte noch den Punkt  $o$  umgibt, verschwindet. Es verschwindet auch für eine geschlossene Fläche, welche den Punkt  $o$  und die leuchtenden Punkte umgibt, wie man er-



kennt, wenn man die Gleichung (10) für zwei geschlossene Flächen bildet, die einen gemeinsamen Theil haben, und von denen die eine den Punkt  $o$  und nicht die leuchtenden Punkte, die andere die leuchtenden Punkte und nicht den Punkt  $o$  umgibt.

Die Anwendung, die von der Gleichung (10) bei dem vorliegenden, am Ende des vorigen Paragraphen bezeichneten Problem zu machen ist, liegt auf der Hand. Man denke sich in dem homogenen Aether, der den unendlichen Raum erfüllt, einen leuchtenden Punkt 1; auf die Bewegung, die er hervorbringt, beziehe sich die Function  $\varphi^*$ . Wird ein fremdartiger Körper in den Raum gebracht, so wird die Bewegung geändert; es werde dadurch  $\varphi$  aus  $\varphi^*$ ; es handelt sich darum,  $\varphi$  zu ermitteln für irgend einen Punkt  $o$ , der ausserhalb des Körpers liegt. Es sei  $ds$  ein Element der Oberfläche des Körpers,  $dS$  ein Element einer unendlich kleinen Kugelfläche, die um den leuchtenden Punkt beschrieben ist; der Gleichung (10) zufolge ist dann:

$$4\pi\varphi_o = \int dS\Omega + \int ds\Omega.$$

Das erste dieser beiden Integrale hat einen leicht angebbaren Werth. Die Aenderung der Bewegung an dem Elemente  $dS$ , die durch die Einführung des Körpers hervorgerufen wird, ist (bei Ausschluss eines gewissen, speciellen Falles) nicht unendlich gross, und da die Kugelfläche, der  $dS$  angehört, unendlich klein ist, so ist ihr Einfluss auf den Werth des Integrals unendlich klein. Es kann in diesem also  $\varphi^*$  für  $\varphi$  gesetzt werden, wodurch dasselbe nach der Gleichung (10)  $= 4\pi\varphi_o^*$  wird, wenn  $\varphi_o^*$  den Werth von  $\varphi^*$  im Punkte  $o$  bezeichnet. Man hat daher:

$$(12) \quad 4\pi\varphi_o = 4\pi\varphi_o^* + \int ds\Omega.$$

Nach dieser Gleichung kann  $\varphi_o$  allgemein berechnet werden, wenn man  $\varphi^*$  und für die Oberfläche des Körpers die Werthe von  $\varphi$  und  $\partial\varphi/\partial N$  kennt.

§ 3. Für die später anzustellenden Betrachtungen ist es nöthig, den Werth zu kennen, den das Integral  $\int ds\Omega$  ausgedehnt über eine begrenzte Fläche, unter gewissen Be-

dingungen hat. Dieser Werth soll jetzt abgeleitet werden. Vorausgesetzt soll dabei werden, dass die Wellenlänge unendlich klein ist, dass  $q$  von einem leuchtenden Punkte 1 herrührt, also den in (4) angegebenen Ausdruck hat, dass für keinen endlichen Theil der Fläche  $s$ , über die das Integral auszudehnen ist, oder ihrer Grenze  $r_1 + r_0$  constant, oder bis auf unendlich Kleines constant ist, und endlich, dass die gerade Verbindungslinie der Punkte 1 und 0 nicht durch die Grenze der Fläche oder unendlich nahe an ihr vorbei geht. Es wird bewiesen werden, dass dann das genannte Integral vsrschwindet, falls die gerade Verbindungslinie von 1 und 0 die Fläche  $s$  nicht schneidet. Die Rechnung wird ergeben, dass, wenn ein solcher Schnitt stattfindet, das Integral  $= \pm 4\pi q_0$  ist, wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem die Normale  $N$  in dem Schnittpunkt einen spitzen oder stumpfen Winkel mit der von 1 nach 0 gezogenen Geraden bildet; was, wenn die erste Behauptung bewiesen ist, schon aus der Gleichung (10) folgt.

Man nehme zuerst für  $q$  den in (3) gegebenen Ausdruck an, setze also:

$$q = \frac{1}{r_1} \cos\left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi;$$

dann wird:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial N} \frac{1}{r_0} q \left(t - \frac{r_0}{a}\right) &= -\frac{1}{r_1 r_0^2} \frac{\partial r_0}{\partial N} \cos\left(\frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi \\ &\quad - \frac{2\pi}{r_1 r_0 \lambda} \frac{\partial r_0}{\partial N} \sin\left(\frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi, \end{aligned}$$

ferner nach (8):

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_0} f\left(t - \frac{r_0}{a}\right) &= -\frac{1}{r_1^2 r_0} \frac{\partial r_1}{\partial N} \cos\left(\frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi \\ &\quad - \frac{2\pi}{r_1 r_0 \lambda} \frac{\partial r_1}{\partial N} \sin\left(\frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi \end{aligned}$$

und daher nach (11):

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} \Omega &= \frac{1}{r_1 r_0} \left( \frac{1}{r_1} \frac{\partial r_1}{\partial N} - \frac{1}{r_0} \frac{\partial r_0}{\partial N} \right) \cos\left(\frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi \\ &\quad + \frac{2\pi}{r_1 r_0 \lambda} \left( \frac{\partial r_1}{\partial N} - \frac{\partial r_0}{\partial N} \right) \sin\left(\frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi. \end{aligned} \right.$$

Um bei diesem Werthe von  $\Omega$  das genannte Integral zu finden, gehe man von dem folgenden Satze aus.

Bezeichnet  $F(\zeta)$  eine Function von  $\zeta$ , die stetig ist in dem Intervall, in dem  $\zeta$  von  $\zeta_0$  bis  $\zeta'$  wächst, und  $\delta$  eine Constante, so verschwindet das Integral:

$$(14) \quad \int_{\zeta_0}^{\zeta'} \frac{dF}{d\zeta} \sin(k\zeta + \delta) d\zeta,$$

wenn  $k$  unendlich gross wird.

Die Richtigkeit dieses Satzes folgt aus Betrachtungen, die denen ganz ähnlich sind, welche Dirichlet bei seinen Untersuchungen über die Fourier'sche Reihe in Bezug auf ein ähnliches Integral angestellt hat. Man zerlege das Integral in solche Theile, dass innerhalb eines jeden  $dF/d\zeta$  weder sein Vorzeichen wechselt, noch vom Abnehmen ins Zunehmen oder umgekehrt übergeht; von jedem dieser Theile (deren Anzahl als endlich vorausgesetzt wird) beweist man, dass er verschwindet, wenn  $k$  ins Unendliche wächst, indem man ihn weiter in Theile zerlegt der Art, dass alle Werthe von  $\zeta$ , für welche  $\sin(k\zeta + \delta) = 0$  ist, als Zwischengrenzen auftreten, und die Ungleichheiten benutzt, die für die absoluten Werthe dieser Theile sich angeben lassen.

Aus diesem Satze ergibt sich leicht der folgende.

Wenn die Function  $F(\zeta)$  die Eigenschaft hat, dass ihr erster Differentialquotient in dem Intervall von  $\zeta = \zeta_0$  bis  $\zeta = \zeta'$  stetig ist, so wird für  $k = \infty$ :

$$(15) \quad k \int_{\zeta_0}^{\zeta'} \frac{dF}{d\zeta} \sin(k\zeta + \delta) d\zeta = - \left[ \frac{dF}{d\zeta} \cos(k\zeta + \delta) \right]_{\zeta_0}^{\zeta'}.$$

In der That wird die linke Seite dieser Gleichung durch partielle Integration:

$$= - \left[ \frac{dF}{d\zeta} \cos(k\zeta + \delta) \right]_{\zeta_0}^{\zeta'} + \int_{\zeta_0}^{\zeta'} \frac{d^2 F}{d\zeta^2} \cos(k\zeta + \delta) d\zeta;$$

das neue hier auftretende Integral ist aber von der Form des Integrals (14), verschwindet also, wenn  $k$  ins Unendliche wächst.

Jetzt denke man sich eine stetig gekrümmte, vollständig begrenzte Fläche  $s$ , deren Element  $ds$  sein soll, nenne  $r_1$

und  $r_0$  die Entfernungen dieses Elementes von zwei festen Punkten 1 und 0, setze:

$$\zeta = r_1 + r_0,$$

bezeichne durch  $G$  eine sich stetig ändernde Function des Ortes von  $ds$ , durch  $\delta$  eine Constante, und untersuche den Werth, den das Integral:

$$(16) \quad \int G \sin(k\zeta + \delta) ds$$

annimmt, wenn  $k$  unendlich gross wird.

Zu diesem Zwecke stelle man sich die Flächen vor, deren Gleichung:

$$\zeta = \text{const.}$$

ist, also die Rotationsellipsoide, deren Brennpunkte die Punkte 1 und 0 sind, und die Schnittlinien dieser mit der Fläche  $s$ ; dann setze man:

$$(17) \quad F(\zeta) = \pm \int G ds,$$

wo die Integration über den Theil der Fläche  $s$  auszudehnen ist, der zwischen den zwei Schnittlinien liegt, von denen die eine dem variablen Werthe  $\zeta$ , die andere einem beliebig gewählten, festen Werthe  $Z$  entspricht, und wo das Zeichen + gelten soll, wenn  $\zeta > Z$ , das Zeichen -, wenn  $\zeta < Z$  ist. Bei dieser Festsetzung ist, wenn  $d\zeta$  positiv gewählt wird:

$$(18) \quad \frac{dF}{d\zeta} d\zeta = \int G ds,$$

wo die Integration über den Theil der Fläche  $s$  auszudehnen ist, der zwischen den beiden Schnittlinien liegt, welche den Werthen  $\zeta$  und  $\zeta + d\zeta$  entsprechen. Ist  $\zeta_0$  der kleinste,  $\zeta'$  der grösste Werth von  $\zeta$  in der Fläche  $s$ , so ist hiernach das Integral (16):

$$= \int_{\zeta_0}^{\zeta'} \frac{dF}{d\zeta} \sin(k\zeta + \delta) d\zeta,$$

also = dem Integral (14); es verschwindet daher für  $k = \infty$ , falls  $F(\zeta)$  in der Fläche  $s$  stetig ist, d. h. falls für keinen endlichen Theil der Fläche  $s$  ein constanter Werth von  $\zeta$  stattfindet.

Es werde jetzt bei gleicher Bedeutung der Zeichen der Ausdruck:

$$(19) \quad k \int G \sin(k\zeta + \delta) ds$$

ins Auge gefasst. Dieser ist:

$$= k \int_{\zeta_0}^{\zeta'} \frac{dF}{d\zeta} \sin(k\zeta + \delta) d\zeta,$$

also gleich dem linken Theile der Gleichung (15). Er ist daher für  $k = \infty$  auch gleich dem rechten Theile derselben, falls das durch (18) definirte  $dF/d\zeta$  innerhalb der Fläche  $s$  stetig ist. Dieser Differentialquotient ist unstetig, sobald  $\zeta$  für einen endlichen Theil der Grenze von  $s$  constant ist; wird dieser Fall ausgeschlossen, so kann eine Unstetigkeit nur eintreten, wenn für einen Punkt der Fläche  $d\zeta$  verschwindet. Es wird besonders untersucht werden, was dann stattfindet. Sonst hat die Gleichung (15) Gültigkeit, und aus dieser folgt weiter, dass der Ausdruck (19) verschwindet. Unter den gemachten Voraussetzungen findet nämlich sowohl der grösste als der kleinste Werth von  $\zeta$  in einem oder einigen Punkten der Grenze von  $s$  statt, und für einen jeden solchen Punkt ist das Integral  $\int G ds$ , das man berechnen muss, um nach (18) das entsprechende  $dF/d\zeta$  zu ermitteln, unendlich klein von höherer Ordnung als  $d\zeta$ ; es verschwindet also dieses  $dF/d\zeta$ .

Nun ist der Werth von (19) für den Fall zu suchen, dass  $d\zeta$  für einen Punkt in der Fläche  $s$  verschwindet. Es geschehe das für den Punkt  $(x, y, z)$ , und  $g(x, y, z) = 0$  sei die Gleichung dieser Fläche; dann ist:

$$\frac{\partial r_1}{\partial x} + \frac{\partial r_0}{\partial x} = L \frac{\partial g}{\partial x}, \quad \frac{\partial r_1}{\partial y} + \frac{\partial r_0}{\partial y} = L \frac{\partial g}{\partial y}, \quad \frac{\partial r_1}{\partial z} + \frac{\partial r_0}{\partial z} = L \frac{\partial g}{\partial z},$$

wo  $L$  einen unbestimmten Factor bedeutet. Bezeichnen  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_0, \beta_0, \gamma_0$  und  $\alpha, \beta, \gamma$  die Cosinus der Winkel, welche die Coordinatenaxen bilden mit der Linie, die von dem Punkte 1 nach dem Punkte  $(x, y, z)$  gezogen ist, der Linie, die von dem Punkte 0 nach dem Punkte  $(x, y, z)$  gezogen ist, und einer Normale  $N$  der Fläche  $s$  in diesem Punkte, so lassen diese Gleichungen sich schreiben:

$$(20) \quad \alpha_1 + \alpha_0 = M\alpha, \quad \beta_1 + \beta_0 = M\beta, \quad \gamma_1 + \gamma_0 = M\gamma,$$

wo  $M$  einen neuen Factor bedeutet. Es ergibt sich aus ihnen einmal, dass die Linien  $r_1$  und  $r_0$  und  $N$  in einer Ebene liegen; dann folgt auch:

$$M(\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1) = M(\alpha\alpha_0 + \beta\beta_0 + \gamma\gamma_0),$$

und diese Gleichung sagt aus, dass entweder  $M=0$ , d. h.  $\alpha_0 = -\alpha_1$ ,  $\beta_0 = -\beta_1$ ,  $\gamma_0 = -\gamma_1$  ist, also der Punkt  $(x, y, z)$  zwischen den Punkten 1 und 0, auf ihrer geraden Verbindungslinie liegt, oder die Richtungen  $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$  und  $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$  mit der Richtung von  $N$  gleiche Winkel bilden. Im zweiten Falle müssen die Linien  $r_1$  und  $r_0$  auf entgegengesetzten Seiten der Normale  $N$  liegen, wenn sie nicht mit dieser oder ihrer Verlängerung zusammenfallen; denn durch  $\alpha_0 = \alpha_1$ ,  $\beta_0 = \beta_1$ ,  $\gamma_0 = \gamma_1$  werden die Gleichungen (20) nicht erfüllt, es sei denn, dass  $r_1$  und  $r_0$  mit  $N$  oder der Verlängerung von  $N$  zusammenfallen.

Es werde jetzt die Bedeutung der Zeichen  $x, y, z$  geändert und durch  $(x, y, z)$  ein variabler Punkt der Fläche  $s$  in Bezug auf ein Coordinatensystem bezeichnet, dessen Anfangspunkt der frühere Punkt  $(x, y, z)$  und dessen  $z$ -Axe die Normale  $N$  ist. Es sollen ferner die Dimensionen der Fläche  $s$  als unendlich klein (aber als unendlich gross gegen  $1/k$ ) angenommen werden; es ist ausreichend, unter dieser Annahme das Integral (19) zu berechnen, da sein Werth durch Hinzufügung neuer Theile zur Fläche  $s$  nach dem, was bewiesen ist, nicht geändert wird. Die Gleichung der Fläche  $s$  ist dann:

$$(21) \quad z = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2,$$

wo  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{22}$  Constanten sind, und zugleich ist:

$$ds = dx dy.$$

Um die Schnittlinien der Fläche  $s$  mit den Flächen  $\zeta = \text{const.}$  zu finden, muss nun der Ausdruck von  $\zeta$  gebildet und nach Potenzen von  $x$  und  $y$  entwickelt werden. Es seien  $x_0, y_0, z_0$  die Coordinaten des Punktes 0 und:

$$\varrho_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2};$$

dann ist:

$$r_0 = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

oder:

$$r_0 = \sqrt{\varrho_0^2 - 2xx_0 - 2yy_0 - 2zz_0 + x^2 + y^2 + z^2}.$$

Bezeichnet man  $x$  und  $y$  als unendlich klein von der ersten Ordnung und entwickelt  $r_0$  bei Benutzung von (21) bis auf Grössen der zweiten Ordnung inclusive, so ergibt sich:

$$r_0 = \varrho_0 - \frac{xx_0 + yy_0}{\varrho_0} - \frac{a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2}{\varrho_0} z_0 + \frac{x^2 + y^2}{2\varrho_0} - \frac{(xx_0 + yy_0)^2}{2\varrho_0^3},$$

oder, da die in (20) vorkommenden Grössen  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$  den Gleichungen:

$$\frac{x_0}{\varrho_0} = -\alpha_0, \quad \frac{y_0}{\varrho_0} = -\beta_0, \quad \frac{z_0}{\varrho_0} = -\gamma_0$$

genügen,

$$r_0 = \varrho_0 + \alpha_0 x + \beta_0 y + (a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2)\gamma_0 \\ + \frac{1}{2\varrho_0}(x^2(1 - \alpha_0^2) - 2xy\alpha_0\beta_0 + y^2(1 - \beta_0^2)).$$

Setzt man entsprechend:

$$\varrho_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2},$$

so findet man ebenso:

$$r_1 = \varrho_1 + \alpha_1 x + \beta_1 y + (a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2)\gamma_1 \\ + \frac{1}{2\varrho_1}(x^2(1 - \alpha_1^2) - 2xy\alpha_1\beta_1 + y^2(1 - \beta_1^2)).$$

Bei dem gewählten Coordinatensystem ist aber  $\alpha = 0$  und  $\beta = 0$ , und daher nach (20):

$$\alpha_1 + \alpha_0 = 0, \quad \beta_1 + \beta_0 = 0.$$

Man hat daher:

$$\zeta = A_0 + A_{11}x^2 + 2A_{12}xy + A_{22}y^2, \quad \text{wo:} \\ (22) \quad \begin{cases} A_0 = \varrho_1 + \varrho_0 \\ A_{11} = a_{11}(\gamma_1 + \gamma_0) + \frac{1 - \alpha_1^2}{2\varrho_1} + \frac{1 - \alpha_0^2}{2\varrho_0} \\ A_{12} = a_{12}(\gamma_1 + \gamma_0) - \frac{\alpha_1\beta_1}{2\varrho_1} - \frac{\alpha_0\beta_0}{2\varrho_0} \\ A_{22} = a_{22}(\gamma_1 + \gamma_0) + \frac{1 - \beta_1^2}{2\varrho_1} + \frac{1 - \beta_0^2}{2\varrho_0}. \end{cases}$$

Die Schnittcurven der Flächen  $\zeta = \text{const.}$  mit der Fläche  $s$  sind hiernach ähnliche und ähnlich liegende Kegelschnitte, deren gemeinsamer Mittelpunkt der Anfangspunkt der Coordinaten ist. Ihre Gleichung, bezogen auf die Hauptaxen, sei:

$$\zeta - A_0 = \mu_1 x^2 + \mu_2 y^2,$$

d. h. es seien  $\mu_1$  und  $\mu_2$  die (stets reellen) Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$(23) \quad (A_{11} - \mu)(A_{22} - \mu) - A_{12}^2 = 0.$$

Haben  $\mu_1$  und  $\mu_2$  gleiches Vorzeichen, so sind die Kegelschnitte Ellipsen;  $A_0$  ist das Minimum von  $\zeta$ , wenn  $\mu_1$  und  $\mu_2$  positiv sind, das Maximum, wenn diese beiden Grössen das negative Vorzeichen haben. Im ersten Falle ist die Fläche der Ellipse, die einem Werthe von  $\zeta$  entspricht:

$$= \frac{\pi(\zeta - A_0)}{\sqrt{\mu_1 \mu_2}}, \quad \text{im zweiten:} \quad = \frac{\pi(A_0 - \zeta)}{\sqrt{\mu_1 \mu_2}},$$

wo die Wurzel positiv zu nehmen ist, wie überhaupt die Wurzel aus einer positiven Grösse hier positiv verstanden werden soll. Nach der Gleichung (17) ist daher, wenn die dort mit  $Z$  bezeichnete Grösse  $= A_0$  gewählt wird, für Werthe von  $\zeta$ , bei denen die entsprechenden Ellipsen ganz innerhalb der Fläche  $s$  liegen, in beiden Fällen:

$$F(\zeta) = G \frac{\pi(\zeta - A_0)}{\sqrt{\mu_1 \mu_2}},$$

wo  $G$  sich auf den Punkt ( $x = 0$ ,  $y = 0$ ) bezieht, also:

$$\frac{dF}{d\zeta} = G \frac{\pi}{\sqrt{\mu_1 \mu_2}}.$$

Fällt kein Theil der Grenze von  $s$  mit einer der Ellipsen zusammen, so ist  $dF/d\zeta$  in dieser Fläche stetig und für den zweiten Grenzwert, den  $\zeta$  hier erlangt,  $= 0$ . Danach ist der Ausdruck (19) für  $k = \infty$ , wenn  $\mu_1$  und  $\mu_2$  positiv sind:

$$(24) \quad = G \frac{\pi}{\sqrt{\mu_1 \mu_2}} \cos(kA_0 + \delta),$$

und, wenn  $\mu_1$  und  $\mu_2$  negativ sind:

$$(25) \quad = -G \frac{\pi}{\sqrt{\mu_1 \mu_2}} \cos(kA_0 + \delta).$$

Weniger einfach gestaltet sich die Rechnung, wenn  $\mu_1$  und  $\mu_2$  entgegengesetzte Vorzeichen haben, die Kegelschnitte also Hyperbeln sind; in welchem Falle  $dF/d\zeta$  bei  $\zeta = A_0$  unstetig ist. Man wähle hier die Hauptachsen als Coordinatenachsen und gebe der Fläche  $s$  eine bestimmte Gestalt, nämlich die eines Rechtecks, dessen Seiten den Hauptachsen parallel sind und die Gleichungen:

$$x = \pm a, \quad y = \pm b$$



haben. Die Ecken sollen auf den Asymptoten liegen, es soll also:

$$a\sqrt{\mu_1} = b\sqrt{-\mu_2} = c$$

sein, wo  $\mu_1$  positiv,  $\mu_2$  negativ,  $c$  positiv ist. Die reelle Hauptaxe der einem Werthe von  $\zeta$  entsprechenden Hyperbel fällt dann in die  $x$ -Axe, wenn  $\zeta - A_0$  positiv, in die  $y$ -Axe, wenn  $\zeta - A_0$  negativ ist. Setzt man wieder die bei der Gleichung (17) definirte Grösse  $Z = A_0$ , so hat man daher für  $\zeta > A_0$ :

$$F(\zeta) = G \left\{ 2ab - \frac{4}{\sqrt{-\mu_2}} \int \frac{a}{\sqrt{\mu_1 x^2 - \zeta + A_0}} dx \right\},$$

wo  $G$  wiederum auf den Punkt ( $x = 0$ ,  $y = 0$ ) sich bezieht. Daraus folgt:

$$\frac{dF}{d\zeta} = G \frac{2}{\sqrt{-\mu_2}} \int \frac{dx}{\sqrt{\mu_1 x^2 - \zeta + A_0}},$$

oder, da:

$$\int_1^z \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}} = \log(z + \sqrt{z^2 - 1}),$$

$$\frac{dF}{d\zeta} = G \frac{2}{\sqrt{-\mu_1 \mu_2}} \log \frac{c + \sqrt{c^2 - \zeta + A_0}}{\sqrt{\zeta - A_0}}.$$

Ebenso findet man für  $\zeta < A_0$ :

$$\frac{dF}{d\zeta} = G \frac{2}{\sqrt{-\mu_1 \mu_2}} \log \frac{c + \sqrt{c^2 + \zeta - A_0}}{\sqrt{A_0 - \zeta}}.$$

Erwägt man, dass der kleinste Werth von  $\zeta$  in den Punkten ( $x = 0$ ,  $y = \pm b$ ) stattfindet, und  $= A_0 - c^2$  ist, während der grösste in den Punkten ( $x = \pm a$ ,  $y = 0$ ) vorkommt und  $= A_0 + c^2$  ist, so ergibt sich der Ausdruck (19):

$$= G \frac{2}{\sqrt{-\mu_1 \mu_2}} k \left\{ \int_{A_0 - c^2}^{A_0} \log \frac{c + \sqrt{c^2 + \zeta - A_0}}{\sqrt{A_0 - \zeta}} \sin(k\zeta + \delta) d\zeta \right. \\ \left. + \int_{A_0}^{A_0 + c^2} \log \frac{c + \sqrt{c^2 - \zeta + A_0}}{\sqrt{\zeta - A_0}} \sin(k\zeta + \delta) d\zeta \right\}.$$

Setzt man in dem ersten dieser beiden Integrale:

$$A_0 - \xi = \xi,$$

in dem zweiten:  $\xi - A_0 = \xi,$

so wird derselbe Ausdruck:

$$= G \frac{2}{V - \mu_1 \mu_2} k \int_0^{c^2} \log \frac{c + \sqrt{c^2 - \xi}}{\sqrt{\xi}} (\sin(k\xi + kA_0 + \delta) - \sin(k\xi - kA_0 - \delta)) d\xi,$$

oder:

$$= G \frac{4}{V - \mu_1 \mu_2} k \sin(kA_0 + \delta) \int_0^{c^2} \log \frac{c + \sqrt{c^2 - \xi}}{\sqrt{\xi}} \cos k\xi d\xi.$$

Nun ist aber:

$$\begin{aligned} & k \int_0^{c^2} \log \frac{c + \sqrt{c^2 - \xi}}{\sqrt{\xi}} \cos k\xi d\xi \\ &= \left[ \sin k\xi \log \frac{c + \sqrt{c^2 - \xi}}{\sqrt{\xi}} \right]_{\xi=0}^{\xi=c^2} - \int_0^{c^2} \sin k\xi \frac{d}{d\xi} \log(c + \sqrt{c^2 - \xi}) d\xi \\ & \quad + \frac{1}{2} \int_0^{c^2} \frac{\sin k\xi}{\xi} d\xi. \end{aligned}$$

Das erste von diesen drei Gliedern ist für jeden Werth von  $k$  gleich Null, da der in den Klammern stehende Ausdruck sowohl für  $\xi = c^2$ , als für  $\xi = 0$  verschwindet; das zweite ist von der Form des Ausdrucks (14) und verschwindet daher für  $k = \infty$ , da  $\log(c + \sqrt{c^2 - \xi})$  auch bei  $\xi = c^2$  stetig ist, obwohl sein Differentialquotient unendlich wird; das dritte endlich ist für  $k = \infty$ :

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sin u du}{u} \text{ d. h. } = \frac{\pi}{4}.$$

Der gesuchte Werth des Ausdrucks (19) ist daher, wenn  $\mu_1$  und  $\mu_2$  von entgegengesetztem Vorzeichen sind:

$$(26) \quad = G \frac{\pi}{V - \mu_1 \mu_2} \sin(kA_0 + \delta).$$

Bei der weiteren Discussion der Ausdrücke (24), (25) und (26) ist zu benutzen, dass, da  $\mu_1$  und  $\mu_2$  die Wurzeln der Gleichung (23) sind:

(27)  $\mu_1 \mu_2 = A_{11} A_{22} - A_{12}^2$   
 ist, wo  $A_{11}$ ,  $A_{12}$ ,  $A_{22}$  die in (22) angegebenen Werthe haben.

Wie aus den Gleichungen (20) geschlossen ist, beziehen sich die nun durchgeführten Betrachtungen auf zwei Fälle; der erste von diesen ist der, dass die Fläche  $s$  von der geraden Verbindungslinie der Punkte 1 und 0 geschnitten wird, der zweite der, dass es in der Fläche  $s$  einen Punkt gibt, der die Eigenschaft hat, dass die von ihm nach den Punkten 1 und 0 gezogenen Linien gleiche Winkel mit der Normale der Fläche  $s$  bilden und mit dieser in einer Ebene liegen. Der erste von diesen Fällen soll hier noch weiter untersucht werden. In ihm ist:

$$\alpha_1 + \alpha_0 = 0, \quad \beta_1 + \beta_0 = 0, \quad \gamma_1 + \gamma_0 = 0,$$

die Gleichungen (22) geben daher:

$$A_{11} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_0} \right) (1 - \alpha_1^2), \quad A_{12} = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_0} \right) \alpha_1 \beta_1,$$

$$A_{22} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_0} \right) (1 - \beta_1^2),$$

und nach (27) ist:

$$\mu_1 \mu_2 = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_0} \right)^2 \gamma_1^2.$$

Die Wurzeln der Gleichung (23),  $\mu_1$  und  $\mu_2$ , sind:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_0} \right) \text{ und } \frac{1}{2} \left( \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_0} \right) \gamma_1^2,$$

also beide positiv; daher ist der Ausdruck (19) dem Ausdruck (24) gleichzusetzen ist; er ist also:

$$(28) \quad = \pm G 2\pi \frac{q_1 q_0}{q_1 + q_0} \frac{1}{\gamma_1} \cos(k(q_1 + q_0) + \delta),$$

wo das positive oder negative Zeichen zu wählen ist, je nachdem  $\gamma_1$  positiv oder negativ ist.

Bei diesen, über den Ausdruck (19) angestellten Betrachtungen ist  $\delta$  als eine Constante angenommen; sie gelten aber auch, wenn  $\delta$ , wie  $G$ , sich stetig mit dem Orte von  $ds$  ändert; dann muss in den Ausdrücken (24), (25), (26) und (28)  $\delta$ , sowie  $G$ , auf den Punkt ( $x=0$ ,  $y=0$ ) bezogen werden.

Man sieht das ein, wenn man erwägt, dass das Integral (19) bei variablem  $\delta$  durch die Formel:

$$\sin(k\zeta + \delta) = \cos \delta \sin k\zeta + \sin \delta \cos k\zeta,$$

in die Summe zweier Integrale von gleicher Form zerlegt werden kann, in denen  $\delta$  die constanten Werthe 0 und  $\frac{1}{2}\pi$  hat.

Mit Hülfe der gewonnenen Resultate ist es nun leicht, die im Eingange dieses Paragraphen in Betreff des Integrals  $\int ds \Omega$  ausgesprochene Behauptung zu beweisen.

Es habe zunächst  $\Omega$  den in (13), also  $\varphi$  den in (3) angegebenen Werth; man setze:

$$\frac{2\pi}{k} = k \text{ und } -\frac{t}{T} 2\pi = \delta;$$

man sieht dann, dass der Theil des genannten Integrals, der von dem ersten Gliede von  $\Omega$  herrührt, verschwindet, und dass auch der Theil desselben, den das zweite Glied von  $\Omega$  ergibt, gleich Null ist, wenn es nicht in der Fläche  $s$  einen Punkt der Art gibt, dass die von ihm nach den Punkten 1 und 0 gezogenen Linien gleiche Winkel mit der Normale der Fläche bilden und mit dieser in einer Ebene liegen, und wenn die Fläche nicht von der Verbindungslinie der Punkte 1 und 0 geschnitten wird. Ist die erste von diesen beiden Bedingungen nicht erfüllt, so verschwindet das betreffende Integral aber auch; um seinen Werth zu finden, hat man nämlich in dem Ausdruck (24), (25) oder (26) für  $G$  den Werth zu setzen, den:

$$(29) \quad \frac{1}{r_1 r_0} \left( \frac{\partial r_1}{\partial N} - \frac{\partial r_0}{\partial N} \right)$$

in dem bezeichneten Punkte annimmt, und dieser Werth ist gleich Null, da  $\partial r_1 / \partial N$  und  $\partial r_0 / \partial N$  die Cosinus der Winkel sind, die einander gleich sein sollen. Es verschwindet daher  $\int ds \Omega$  nur dann nicht, wenn die Fläche  $s$  von der Verbindungslinie der Punkte 1 und 0 geschnitten wird. Der Ausdruck (28) gibt in diesem Falle seinen Werth, wenn man in ihn für  $G$  den Werth setzt, den (29) in dem Schnittpunkte hat. Lässt man die Richtung von  $N$ , die in (13) vorkommt, mit der Richtung der  $z$ -Axe zusammenfallen, auf die  $\gamma_1$  in (28) sich bezieht, so wird:

$$\frac{\partial r_1}{\partial N} = \gamma_1, \quad \frac{\partial r_0}{\partial N} = -\gamma_1$$

und daher der Werth von (29):

$$= \frac{2\gamma_1}{\varrho_1 \varrho_0},$$

also: 
$$\int ds \Omega = \pm \frac{4\pi}{\varrho_1 + \varrho_0} \cos \left( \frac{\varrho_1 + \varrho_0}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) 2\pi$$

oder: 
$$= \pm 4\pi \varrho_0,$$

wo die positiven oder negativen Zeichen gelten, je nachdem  $\gamma_1$  positiv oder negativ ist, d. h. je nachdem die Normale  $N$  mit der von 1 nach 0 gezogenen Linie einen spitzen oder einen stumpfen Winkel bildet.

Hiermit ist die in Rede stehende Behauptung für den Fall bewiesen, dass  $\varphi$  den durch die Gleichung (3) angegebenen Werth hat; sie bleibt richtig, wenn man von dieser Gleichung in der dort angegebenen Weise zu der allgemeineren Gleichung (4) übergeht.

§ 4. Um aus der Gleichung (12) Folgerungen ziehen zu können, ist es nöthig, die Werthe von  $\varphi$  und  $\partial\varphi/\partial N$  an der Oberfläche des Körpers, den die Gleichung voraussetzt, zu untersuchen.

Fallen in einem durchsichtigen Mittel auf die Ebene, in der dasselbe an ein zweites Mittel grenzt, ebene Lichtwellen, so bilden sich reflectirte und gebrochene ebene Wellen. Dass diese entstehen und die Richtungen haben, die sie erfahrungsmässig besitzen, kann als eine Folge davon angesehen werden, dass zwischen den Verrückungen der Aethertheile an der Grenze in beiden Mitteln und deren Differentialquotienten lineare, homogene Gleichungen mit constanten Coëfficienten bestehen. Es beziehe sich  $\varphi_e$  auf das einfallende Licht,  $\varphi_r$  auf das reflectirte im Punkte  $(\xi, \eta, \zeta)$ ; für das erste Mittel sei  $\zeta < 0$ , für das zweite  $\zeta > 0$  und:

$$\varphi_e = A \cos \left( \frac{l\xi + m\eta + n\zeta}{\lambda} - \frac{t + \alpha}{T} \right) 2\pi,$$

wobei  $l, m, n$  die Cosinus der Winkel bedeuten, die die Coordinatenaxen mit der Richtung der Wellennormale des einfallenden Lichtes bilden, in der dieses fortschreitet. Es ist dann:

$$q_r = c A \cos \left( \frac{l\xi + m\eta - n\zeta}{\lambda} - \frac{t + \alpha + \gamma}{T} \right) 2\pi,$$

wo  $c$  und  $\gamma$  Constanten sind, deren Werthe abhängen von der Bedeutung des Zeichens  $q$ , dem Einfallswinkel, dem Polarisationszustande des einfallenden Lichtes und der Natur der beiden Mittel. Für  $\xi = 0$  hat man daher, wenn man die Zeichen  $q_e(t)$  und  $q_r(t)$  als gleichbedeutend mit  $q_e$  und  $q_r$  gebraucht,

$$(30) \quad \begin{aligned} q_r(t) &= c q_e(t + \gamma) && \text{und:} \\ \frac{\partial q_r(t)}{\partial \xi} &= -c \frac{\partial q_e(t + \gamma)}{\partial \xi}, \end{aligned}$$

von welchen Gleichungen die zweite auch geschrieben werden kann:

$$(30) \quad \frac{\partial q_r(t)}{\partial N} = -c \frac{\partial q_e(t + \gamma)}{\partial N},$$

wenn  $N$ , wie früher, die nach dem Inneren des ersten Mittels gekehrte Normale der Grenze bedeutet.

Sind im einfallenden Lichte gleichzeitig Wellen von verschiedenen Richtungen vorhanden, sodass sowohl  $q_e$  als  $q_r$  eine Summe solcher Ausdrücke ist, wie sie eben diesen Zeichen gleichgesetzt sind, so bestehen entsprechende Gleichungen für die einzelnen Glieder dieser Summen.

Diese Sätze können eine Anwendung auf den Fall finden, auf den die Gleichung (12) sich bezieht, wenn man die Wellenlänge  $\lambda$  als unendlich klein voraussetzt und die Krümmung der Oberfläche des gedachten Körpers als nirgends unendlich gross annimmt.

Die Gleichung (12) stellt  $q_0$  (d. h. den Werth von  $q$  für einen beliebigen Punkt 0 des betrachteten Raumes) als eine Summe von Gliedern dar, die herrühren von dem leuchtenden Punkte 1 und von leuchtenden Punkten, die in der Grenzfläche jenes Raumes liegen. Man nehme den Punkt 0 unendlich nahe an dieser Grenzfläche an, und zwar so nahe, dass sein Abstand von ihr auch gegen  $\lambda$  unendlich klein ist. Die Lichtwellen, die ihn treffen, können dann theils als einfallende, theils als reflectirte oder gebrochene bezeichnet werden, je nachdem sie nach der Grenze hin, oder von ihr fort sich bewegen. Die leuchtenden Punkte, von denen die

ersten herrühren, sind diejenigen, die sich auf der einen, die leuchtenden Punkte, von denen die letzten herrühren, diejenigen, die auf der anderen Seite der unendlichen Ebene sich befinden, die durch den Punkt 0, dem nächsten Element der Grenzfläche parallel gelegt ist. Sind, wie angenommen werden soll, in dem zweiten Mittel einfallende Wellen nicht vorhanden, so existiren in dem ersten nur einfallende und reflectirte; es möge  $\varphi_e$  auf die einfallenden,  $\varphi_r$  auf die reflectirten Wellen,  $\varphi$  auf die ganze Bewegung in dem Punkte, der hier der Punkt 0 genannt ist, sich beziehen, sodass:

$$\varphi = \varphi_e + \varphi_r \text{ und } \frac{\partial \varphi}{\partial N} = \frac{\partial \varphi_e}{\partial N} + \frac{\partial \varphi_r}{\partial N}$$

ist. Dabei gelten dann die Gleichungen (30), wenn das einfallende Licht nur aus einem Wellensysteme besteht und die entsprechenden, dort angegebenen, wenn mehr einfallende Wellensysteme zu unterscheiden sind.

Ein Fall, der besonders einfach, und für den die Vorstellung leichter ist, als für den allgemeinen, ist der, dass ein schwarzer Körper das zweite Mittel bildet, d. h. ein solcher, der Licht weder reflectirt, noch hindurchlässt. Ein Körper, in dem das Licht dieselbe Fortpflanzungsgeschwindigkeit hat, wie in der durchsichtigen Umgebung und hinreichend stark absorbirt wird, muss, der Erfahrung zufolge, diese Eigenschaft besitzen. In einem solchen Körper, wie in jedem undurchsichtigen, sind einfallende Wellen an seiner Oberfläche nicht vorhanden, wie es oben vorausgesetzt ist; überdies ist die mit  $c$  bezeichnete Grösse bei ihm immer gleich Null; die an der Oberfläche des schwarzen Körpers zu erfüllende Bedingung ist daher die, dass:

$$(31) \quad \varphi_r = 0 \text{ und } \frac{\partial \varphi_r}{\partial N} = 0 \text{ ist.}$$

Wenn der bei der Gleichung (12) gedachte Körper ein schwarzer, und seine Oberfläche überall convex ist, so lassen sich hiernach die Werthe von  $\varphi$  und  $\partial \varphi / \partial N$  für die Oberfläche mit Leichtigkeit finden. Denkt man sich eine Ebene, die, einer Tangentialebene parallel und unendlich nahe, bei dem Körper vorbeigeht, so liegt die ganze Oberfläche auf der einen Seite dieser Ebene, der Art, dass jedes Element

$ds$  immer nur einen Beitrag zu  $\varphi_r$ , aber keinen zu  $\varphi_e$  liefern kann. Man stelle sich den Kegel vor, der seine Spitze in dem leuchtenden Punkte 1 hat und die Oberfläche berührt; die Berührungslinie desselben theilt die Oberfläche in zwei Theile, von denen der eine dem leuchtenden Punkte zugewandt, der andere von diesem abgewandt ist; für einen Punkt, der dem ersten Theile unendlich nahe ist, liefert der leuchtende Punkt 1 zu  $\varphi_e$  den Beitrag  $\varphi^*$ , für einen Punkt, der unendlich nahe an dem zweiten liegt, liefert er diesen Beitrag zu  $\varphi_r$ , wo  $\varphi^*$  wieder sich auf die Bewegung bezieht, die stattfinden würde, wenn der schwarze Körper nicht vorhanden wäre. An dem ersten Theile ist daher:

$$(32) \quad \varphi = \varphi^*, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial N} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial N};$$

an dem zweiten ist:

$$\varphi_e = 0, \quad \frac{\partial \varphi_e}{\partial N} = 0,$$

und hieraus folgt nach (31):

$$(33) \quad \varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial N} = 0.$$

Bei einer beliebigen Gestalt des schwarzen Körpers genügt man der Bedingung (31), indem man für diejenigen Punkte der Oberfläche, in denen diese zum ersten mal von Geraden, die vom Punkte 1 ausgehen, getroffen wird, die Gleichungen (32), für alle anderen Punkte der Oberfläche die Gleichungen (33) festsetzt. Unter dieser Annahme folgt nämlich aus einem im § 3 bewiesenen Satze, dass das Integral  $\int ds \Omega$ , ausgedehnt über die ganze Oberfläche, verschwindet, wenn der Punkt 0 unendlich nahe an dem ersten Theile, und dass es  $= -4\pi\varphi_0^*$  ist, wenn der Punkt 0 unendlich nahe an dem zweiten Theile der Oberfläche gewählt wird; woraus dann mit Hülfe von (12) die Gleichungen (31) für die ganze Oberfläche sich ergeben.

Aus dem eben angezogenen Satze folgt aber auch weiter, dass, wo auch der Punkt 0 in dem durchsichtigen Mittel angenommen wird,  $\varphi_0 = \varphi_0^*$  ist, falls die gerade Verbindungslinie von 1 und 0 die Oberfläche des Körpers nicht trifft, und  $\varphi_0 = 0$ , falls diese Linie die Oberfläche zweimal oder öfter schneidet. Da man unter  $\varphi$  irgend eine der Ver-



rückungen  $u$ ,  $v$ ,  $w$  verstehen kann, so ist hierdurch ausgesprochen, dass in dem ersten der beiden unterschiedenen Fälle die Lichtbewegung im Punkte 0 dieselbe ist, wie wenn der schwarze Körper fehlte, im zweiten aber am Orte von 0 Dunkelheit stattfindet; damit ist gesagt, dass der schwarze Körper einen Schatten wirft, dass das Licht des leuchtenden Punktes sich geradlinig fortpflanzt, in Strahlen, die als unabhängig voneinander betrachtet werden können.

§ 5. Der eben benutzte, im Anfange des § 3 ausgesprochene Satz gilt nur unter gewissen, dort angegebenen Voraussetzungen; sind diese nicht erfüllt, so sind auch die hier aus dem Satze gezogenen Folgerungen nicht richtig, es treten dann Beugungserscheinungen auf.

Man denke sich den leuchtenden Punkt 1 von einem schwarzen Schirm, in dem eine Oeffnung sich befindet, rings umgeben. Die Linie, in welcher die Oberfläche des Schirmes von einem Kegel berührt wird, der seine Spitze in dem Punkte 1 hat, heisse der Rand der Oeffnung; er theilt die Oberfläche des Schirmes in einen inneren und einen äusseren Theil. Irgend eine Fläche, die durch den Rand begrenzt ist und mit dem einen, wie mit dem anderen dieser Theile eine geschlossene Fläche bildet, die den leuchtenden Punkt umgiebt, sei die Fläche  $s$ . Liegt der Punkt 0 irgendwo ausserhalb dieser geschlossenen Flächen, so ist dann nach der Gleichung (12), nach der in Bezug auf schwarze Körper aufgestellten Hypothese, also den Gleichungen (32), (33), und nach der Gleichung (10):

$$(34) \quad 4\pi q_0 = \int ds \Omega,$$

wo bei der Bildung von  $\Omega q^*$  für  $q$  zu setzen und die Integration über die Fläche  $s$  auszudehnen ist. Es können sich Beugungserscheinungen in der Nähe des Punktes 0 zeigen, wenn für einen endlichen Theil der Fläche  $s$  oder ihrer Grenze  $r_1 + r_0$  bis auf unendlich Kleines constant ist, oder die gerade Verbindungslinie der Punkte 1 und 0 unendlich nahe an der Grenze der Fläche  $s$  vorbeigeht. Bei den Erscheinungen, die Fresnel in der Axe einer kreisförmigen Oeffnung oder eines kreisförmigen Schirmes beob-

achtete, während ein leuchtender Punkt auf derselben Axe sich befand, waren  $r_1$  und  $r_0$ , also auch  $r_1 + r_0$  für alle Punkte der Grenze von  $s$  nahe constant; bei den nach Fresnel benannten Beugungserscheinungen, bei den Fransen nämlich, die in der Nähe der Schattengrenze eines Schirmes auftreten, geht die Verbindungslinie von 1 und 0 nahe bei der Grenze von  $s$  vorbei; bei den Fraunhofer'schen Beugungserscheinungen (wenn dieselben ohne Benutzung von Linsen, also auf einer unendlich entfernten Tafel, mit Hülfe eines unendlich entfernten leuchtenden Punktes dargestellt werden) ist  $r_1 + r_0$  für die ganze Oeffnung nahe constant.

Um auch für diese Fälle die Intensität des Lichtes im Punkte 0 zu finden, setze man zunächst, der Gleichung (3) entsprechend:

$$(35) \quad \varphi^* = \frac{1}{r_1} \cos \left( \frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) 2\pi.$$

Es erhält dann  $\Omega$  den in (13) angegebenen Werth. Die beiden Glieder, aus denen derselbe zusammengesetzt ist, sind, da  $\lambda$  unendlich klein ist, von ungleicher Grössenordnung, es sei denn, dass:

$$\frac{\partial r_1}{\partial N} - \frac{\partial r_0}{\partial N}$$

unendlich klein ist, welcher Fall hier nicht in Betracht gezogen zu werden braucht. Die Gleichung (34) gibt daher:

$$\varphi_0 = \frac{1}{2\lambda} \int \frac{ds}{r_1 r_0} \left( \frac{\partial r_1}{\partial N} - \frac{\partial r_0}{\partial N} \right) \sin \left( \frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) 2\pi.$$

Um Weitläufigkeiten zu vermeiden, werde nun angenommen, dass die Fläche  $s$  eine ebene ist, dass ihre Dimensionen gegen  $r_1$  und  $r_0$  so klein sind, dass  $r_1$  und  $r_0$  da, wo sie ausserhalb des Sinuszeichens vorkommen, sowie ihre nach  $N$  genommenen Differentialquotienten als constant betrachtet werden können, und endlich, dass die Linien  $r_0$  unendlich kleine Winkel mit den Verlängerungen der Linien  $r_1$  bilden. Man hat dann:

$$\frac{\partial r_0}{\partial N} = - \frac{\partial r_1}{\partial N},$$

und

$$\varphi_0 = \frac{1}{\lambda r_1 r_0} \frac{\partial r_1}{\partial N} \int ds \sin \left( \frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) 2\pi.$$

Man verallgemeinere nun den Ausdruck von  $q^*$  auf dem Wege, auf dem die Gleichung (4) aus der Gleichung (3) abgeleitet ist, sodass man erhält:

$$(36) \quad q^* = \frac{D}{r_1} \cos\left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi + \frac{D'}{r_1} \sin\left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi,$$

wo  $D$  und  $D'$  von der Richtung des von dem leuchtenden Punkte 1 durch den Punkt  $(x, y, z)$  gehenden Strahles abhängen. Dabei wird dann:

$$q_0 = \frac{1}{\lambda r_1 r_0} \frac{\partial r_1}{\partial N} \left\{ D \int ds \sin\left(\frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi - D' \int ds \cos\left(\frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi \right\},$$

wo  $D$  und  $D'$  dieselbe Bedeutung haben. Jetzt darf man unter  $q$  irgend eine der Verrückungen  $u, v, w$  verstehen; thut man das und schreibt  $A$  und  $A', B$  und  $B', C$  und  $C'$  für  $D$  und  $D'$ , je nachdem  $q = u, v, w$  gesetzt wird, so wird bei der in § 1 definirten Einheit für die Lichtintensität die Intensität des Lichtes in der beugenden Oeffnung:

$$= \frac{1}{2r_1^2} (A^2 + A'^2 + B^2 + B'^2 + C^2 + C'^2).$$

Bezeichnet man diese durch  $J$  und setzt:

$$c = \int ds \cos \frac{r_1 + r_0}{\lambda} 2\pi, \quad s = \int ds \sin \frac{r_1 + r_0}{\lambda} 2\pi,$$

so wird die Intensität im Punkte 0:

$$= J \frac{1}{\lambda^2 r_0^2} \left( \frac{\partial r_1}{\partial N} \right)^2 (c^2 + s^2),$$

welche Gleichung durch mannigfaltige Messungen als mit der Erfahrung übereinstimmend nachgewiesen ist.<sup>1)</sup>

§ 6. Die eben abgeleitete Gleichung setzt wesentlich voraus, dass die Dimensionen der beugenden Oeffnung sehr gross gegen die Wellenlängen sind, und ihre Anwendung auf die Beugungsspectren, bei deren Herstellung oft Gitter benutzt sind, deren Spalten nur eine Breite von wenigen Wellenlängen besaßen, ist nicht zu rechtfertigen.<sup>2)</sup> Doch haben die Messungen, denen wir die Kenntniss der Wellenlängen verdanken, gezeigt, dass diese Anwendung die Orte der Lichtmaxima mit grosser Genauigkeit richtig ergibt.

1) Vgl. Fröhlich, Wied. Ann. **6**. p. 429. 1879.

2) Vgl. Fröhlich, Wied. Ann. **6**. p. 430. 1879 und **15**. p. 592. 1882.  
Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XVIII.

Diese Thatsache findet von den hier zu Grunde gelegten Hypothesen aus ihre Erklärung durch die folgenden Betrachtungen.

Man denke sich das Gitter, über dessen Beschaffenheit eine specielle Voraussetzung nicht gemacht zu werden braucht, das z. B. ein Drahtgitter oder ein Russgitter oder ein Diamantgitter sein kann, in die passende Oeffnung eines ebenen, schwarzen Schirmes, der nach allen Seiten sich in die Unendlichkeit erstreckt, eingefügt. Man verstehe unter  $ds$  ein Element der Ebene des Gitters, oder, um präziser zu reden, ein Element einer Ebene, die dem Gitter sehr nahe, auf der Seite desselben liegt, auf der der Punkt 0 sich befindet. Es gilt dann die Gleichung (9), und diese vereinfacht sich, wenn man die Annahme einführt, dass  $r_0$  unendlich gross ist, in:

$$4\pi\varphi_0(t) = - \int \frac{ds}{r_0} \left\{ f\left(t - \frac{r_0}{a}\right) + \frac{1}{a} \frac{\partial r_0}{\partial N} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \left(t - \frac{r_0}{a}\right) \right\}.$$

Die Ebene, deren Element  $ds$  genannt ist, sei die  $xy$ -Ebene des Coordinatensystems, die  $x$ -Axe senkrecht auf den Spalten, der Anfangspunkt der Mittelpunkt des rechteckig angenommenen Gitters; ferner sei  $\varrho_0$  die Länge der vom Anfangspunkt nach dem Punkte 0 gezogenen Linie, und es seien  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$  die Cosinus der Winkel, welche diese mit den Coordinatenaxen bildet. Man hat dann:

$$r_0 = \varrho_0 - \alpha_0 x - \beta_0 y, \quad \frac{\partial r_0}{\partial N} = \gamma_0 \quad \text{und:} \quad ds = dx dy.$$

Man hat ferner:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= A \cos \frac{t}{T} 2\pi + A' \sin \frac{t}{T} 2\pi \\ f(t) &= \frac{\partial \varphi(t)}{\partial N} = B \cos \frac{t}{T} 2\pi + B' \sin \frac{t}{T} 2\pi \\ \frac{1}{a} \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t} &= \frac{2\pi}{\lambda} A' \cos \frac{t}{T} 2\pi - \frac{2\pi}{\lambda} A \sin \frac{t}{T} 2\pi, \end{aligned}$$

wo  $A, A', B, B'$  Function von  $x$  und  $y$  sind. Substituirt man diese Ausdrücke in die für  $\varphi_0$  aufgestellte Gleichung, so erhält man bei passender Verlegung des Anfangspunktes der Zeit:

$$q_0 = \iint dx dy \left\{ C \cos \left( \frac{t}{T} + \frac{\alpha_0 x + \beta_0 y}{\lambda} \right) 2\pi + C' \sin \left( \frac{t}{T} + \frac{\alpha_0 x + \beta_0 y}{\lambda} \right) 2\pi \right\},$$

wo  $C$  und  $C'$  umgekehrt proportional mit  $\rho_0$ , lineare Functionen von  $\gamma_0$  und — was hier hervorzuheben ist — lineare homogene Functionen von  $A, A', B, B'$  sind, deren Coëfficienten von  $x$  und  $y$  nicht abhängen. Nun sei die Lichtquelle ein leuchtender Punkt, der auf der negativen  $z$ -Axe in der Unendlichkeit liegt,  $2b$  die Länge der Spalten,  $2n$  ihre Anzahl und  $e$  der Abstand entsprechender Punkte zweier aufeinander folgender, also  $2ne$  die Breite des Gitters. Man darf dann annehmen, dass  $A, A', B, B'$ , also  $C$  und  $C'$  von  $y$  so abhängen, dass sie constant bleiben, wenn  $y$  von  $-b$  bis  $+b$  variirt, und verschwinden, wenn  $y$  ausserhalb dieses Intervalls liegt; von  $x$  aber so, dass sie um  $e$  periodisch sind, wenn  $x$  einen Werth zwischen  $-ne$  und  $+ne$  hat, und für andere Werthe von  $x$  verschwinden. Infolge hiervon wird zunächst:

$$q_0 = \frac{\sin \frac{\beta_0 b}{\lambda} 2\pi}{\frac{\beta_0}{\lambda} \pi} \int_{-ne}^{+ne} dx \left\{ C \cos \left( \frac{t}{T} + \frac{\alpha_0 x}{\lambda} \right) 2\pi + C' \sin \left( \frac{t}{T} + \frac{\alpha_0 x}{\lambda} \right) 2\pi \right\}.$$

Da  $\lambda$  als unendlich klein gegen  $b$  angesehen werden kann, so ist der vor dem Integralzeichen stehende Factor für jeden endlichen Werth von  $\beta_0$  gegen  $b$  unendlich klein, während er endlich ist, wenn  $\beta_0$  von der Ordnung von  $\lambda/b$  ist. Unter dem Integralzeichen denke man sich  $C$  und  $C'$  nach Sinus und Cosinus der Vielfachen von  $(x/e) 2\pi$  entwickelt; es treten dann, wenn  $h$  eine ganze Zahl oder Null bedeutet, die Integrale auf:

$$\int_{-ne}^{+ne} dx \cos h \frac{x}{e} 2\pi \sin \alpha_0 \frac{x}{\lambda} 2\pi \quad \text{und:} \quad \int_{-ne}^{+ne} dx \sin h \frac{x}{e} 2\pi \cos \alpha_0 \frac{x}{\lambda} 2\pi,$$

die verschwinden, und die Integrale:

$$\int_{-ne}^{+ne} dx \cos h \frac{x}{e} 2\pi \cos \alpha_0 \frac{x}{\lambda} 2\pi \quad \text{und:} \quad \int_{-ne}^{+ne} dx \sin h \frac{x}{e} 2\pi \sin \alpha_0 \frac{x}{\lambda} 2\pi,$$

die resp.:

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sin ne 2\pi \left( \frac{h}{e} - \frac{\alpha_0}{\lambda} \right)}{2\pi \left( \frac{h}{e} - \frac{\alpha_0}{\lambda} \right)} + \frac{\sin ne 2\pi \left( \frac{h}{e} + \frac{\alpha_0}{\lambda} \right)}{2\pi \left( \frac{h}{e} + \frac{\alpha_0}{\lambda} \right)} \quad \text{und:} \\
 &= \frac{\sin ne 2\pi \left( \frac{h}{e} - \frac{\alpha_0}{\lambda} \right)}{2\pi \left( \frac{h}{e} - \frac{\alpha_0}{\lambda} \right)} - \frac{\sin ne 2\pi \left( \frac{h}{e} + \frac{\alpha_0}{\lambda} \right)}{2\pi \left( \frac{h}{e} + \frac{\alpha_0}{\lambda} \right)}
 \end{aligned}$$

sind. Diese Ausdrücke sind im allgemeinen gegen  $ne$  unendlich klein, wenn  $\lambda$  als unendlich klein gegen  $ne$  bezeichnet wird; sie sind aber endlich, falls:

$$\alpha_0 \pm h \frac{\lambda}{e}$$

von der Ordnung von  $\lambda/ne$  ist.

Da nun unter  $\varphi$  irgend eine der Verrückungen  $u, v, w$  verstanden werden kann, so folgt hieraus, dass für:

$$\alpha_0 = \pm h \frac{\lambda}{e}, \quad \beta_0 = 0$$

die Lichtintensität unendlich gross ist gegen die in allen anderen Punkten des Gesichtsfeldes stattfindende; und das ist es, was die Beobachtungen gezeigt haben.

§ 7. Nach den gemachten Auseinandersetzungen ist es leicht, auch das Gesetz der Reflexion der Lichtstrahlen abzuleiten. Dem leuchtenden Punkte 1 sei ein beliebiger Körper gegenüberstellt. Um den Fall zu vereinfachen, denke man sich aber die Oberfläche dieses mit einer schwarzen Hülle bedeckt, in der nur eine kleine Oeffnung auf der dem leuchtenden Punkte zugewandten Seite sich befindet; überdies seien die geometrischen Verhältnisse der Art, dass das reflectirte Strahlenbündel, welches erfahrungsmässig sich bildet, die Oberfläche des Körpers nicht zum zweiten mal trifft. Wiederum beziehe sich das Zeichen  $\varphi^*$  auf die Bewegung, die stattfinden würde, wenn der fremde Körper nicht vorhanden wäre, und es sei zunächst  $\varphi^*$  durch die Gleichung (35) bestimmt. Den zu erfüllenden Bedingungen genügt man dann, indem man setzt:

für den freien Theil der Oberfläche:

$$\varphi_e = \varphi^*, \quad \frac{\partial \varphi_e}{\partial N} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial N},$$

also nach (30):

$$q_r = \frac{c}{r_1} \cos\left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t+\gamma}{T}\right) 2\pi, \quad \frac{\partial q_r}{\partial N} = -c \frac{\partial}{\partial N} \frac{1}{r_1} \cos\left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t+\gamma}{T}\right) 2\pi,$$

und daher:  $q = q^* + \frac{c}{r_1} \cos\left(\frac{c}{r_1} - \frac{t+\gamma}{T}\right) 2\pi$

$$\frac{\partial q}{\partial N} = \frac{\partial q^*}{\partial N} - c \frac{\partial}{\partial N} \frac{1}{r_1} \cos\left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t+\gamma}{T}\right) 2\pi,$$

für die Punkte des geschwärzten Theiles der Oberfläche, in denen diese zum ersten mal von einer vom leuchtenden Punkte 1 ausgehenden Linie getroffen wird:

$$q = q^*, \quad \frac{\partial q}{\partial N} = \frac{\partial q^*}{\partial N};$$

für alle anderen Punkte der geschwärzten Oberfläche:

$$q = 0, \quad \frac{\partial q}{\partial N} = 0.$$

Den Gleichungen (12) und (11) zufolge ist dann der Ueberschuss des Werthes von  $q_0$  über den Werth, den  $q_0$  haben würde, wenn die ganze Oberfläche des fremden Körpers geschwärzt wäre, die Summe der beiden Integrale:

$$(37) \quad -\frac{1}{4\pi} \int c \frac{ds}{r_1 r_0} \left( \frac{1}{r_1} \frac{\partial r_1}{\partial N} + \frac{1}{r_0} \frac{\partial r_0}{\partial N} \right) \cos\left(\frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t+\gamma}{T}\right) 2\pi \quad \text{und} \\ -\frac{1}{2\lambda} \int c \frac{ds}{r_1 r_0} \left( \frac{\partial r_1}{\partial N} + \frac{\partial r_0}{\partial N} \right) \sin\left(\frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t+\gamma}{T}\right) 2\pi,$$

wobei die Integration über den freien Theil der Oberfläche — der die Fläche  $s$  heissen möge — auszudehnen ist.<sup>1)</sup> Das erste von diesen beiden Integralen ist, wenn der Punkt 0 in endlichem Abstände von der Oberfläche sich befindet, da  $\lambda$  unendlich klein ist, gegen das zweite zu vernachlässigen, sodass der genannte Unterschied der beiden Werthe von  $q_0$  durch das Integral (37) dargestellt ist.

Es gilt dieses auch, wenn  $q^*$ , statt durch die Gleichung (35), durch die Gleichung (36) gegeben ist; nur die Werthe

1) Es wird ohne Schwierigkeit sich nachweisen lassen, dass, wenn der Punkt 0 in oder unendlich nahe an der Oberfläche liegt, dieser Ausdruck zu den Werthen von  $q$  und  $\partial q / \partial N$  zurückführt, die angenommen sind. Doch soll dieser Beweis nicht gegeben werden.

von  $c$  und  $\gamma$  sind dann andere. Das Integral (37) ist von der Form des Integrals (19); aus den in Bezug auf dieses angestellten Betrachtungen folgt, dass jenes im allgemeinen verschwindet. (19) verschwindet nicht, wenn die Fläche  $s$  von der Verbindungslinie der Punkte 1 und 0 geschnitten wird. (37) verschwindet aber auch dann, weil dann für den Schnittpunkt:

$$\frac{\partial r_1}{\partial N} + \frac{\partial r_0}{\partial N} = 0$$

ist. Es ist das Integral (37) von Null verschieden, wenn es in der Fläche  $s$  einen Punkt gibt, dessen Verbindungslinien mit den Punkten 1 und 0 gleiche Winkel mit der Normale der Fläche  $s$  bilden und mit dieser in einer Ebene liegen. Dadurch ist ausgesprochen, dass reflectirte Strahlen existiren, und welche Richtungen diese haben. Eine Störung durch Beugungserscheinungen tritt ein, wenn für einen endlichen Theil der Fläche  $s$  oder ihrer Grenze  $r_1 + r_0$  bis auf unendlich Kleines constant ist, oder der Punkt 0 unendlich nahe an der Grenze des reflectirten Strahlenbündels liegt.

Aus dem eben abgeleiteten Gesetze, welches die Richtungen der reflectirten Strahlen bestimmt, lassen sich die geometrischen Eigenschaften eines Strahlenbündels, das von einem leuchtenden Punkte ausgegangen und an einer krummen Fläche reflectirt ist, entwickeln. Die im § 3 durchgeführten Rechnungen erlauben aber auch anzugeben, wie auf einem Strahle eines solchen Bündels die Intensität und die Phase von einem Punkte zum anderen variirt.

Der Theil von  $q_0$ , der dem reflectirten Lichte entspricht, d. h. der Ausdruck (37), ist durch die Ausdrücke (24), (25) oder (26) gegeben, wenn darin:

$$G = \frac{K}{q_0}$$

gesetzt wird, wo  $K$  eine von  $q_0$  unabhängige Grösse bedeutet. Daraus folgt, dass auf einem reflectirten Strahle die Intensität mit  $q_0$  so sich ändert, dass sie mit dem absoluten Werthe von:

$$q_0^2 \mu_1 \mu_2$$

umgekehrt proportional ist. Nach (27) und (22) lässt dieser Ausdruck sich schreiben:



$$(b_{11}\varrho_0 + c_{11})(b_{22}\varrho + c_{22}) - (b_{12}\varrho_0 + c_{12})^2,$$

wo die Grössen  $b$  und  $c$  von  $\varrho_0$  unabhängig sind, und:

$$c_{11} = \frac{1}{2}(1 - \alpha_0^2), \quad c_{12} = -\frac{1}{2}\alpha_0\beta_0, \quad c_{22} = \frac{1}{2}(1 - \beta_0^2)$$

ist. Sind  $\varrho_0 = f_1$  und  $\varrho_0 = f_2$  die (stets reellen) Wurzeln der quadratischen Gleichung, die man erhält, indem man diesen Ausdruck gleich Null setzt, so ist also die Intensität auch umgekehrt proportional mit dem absoluten Werthe von:

$$(\varrho_0 - f_1)(\varrho_0 - f_2).$$

In den Punkten  $\varrho_0 = f_1$  und  $\varrho_0 = f_2$  ist die Intensität unendlich; es sind das die Brennpunkte des Strahles.

In Betreff der Phase ist zu bemerken, dass diese, wie die Ausdrücke (24), (25), (26) zeigen, sich sprungweise um  $\frac{1}{2}\pi$  ändert, wenn der Punkt 0 durch einen der Brennpunkte hindurchgeht.

Es bedarf kaum der Erwähnung, dass ganz ähnliche Betrachtungen, wie über die Reflexion, auch über die Brechung der Lichtstrahlen angestellt werden können.

### IX. *Ueber Schallstärkemessung;* *von W. Wundt.*

Unter obigem Titel findet sich im vorigen Hefte dieser Annalen eine Abhandlung von K. Vierordt, in welcher neben der Mittheilung eigener neuer Versuche auch eine Besprechung von Beobachtungen enthalten ist, die von Hrn. Dr. E. Tischer in meinem Laboratorium ausgeführt und theils in dessen Dissertation, theils in den von mir herausgegebenen „Philosophischen Studien“<sup>1)</sup> veröffentlicht sind. Da ich eine Bekanntschaft mit diesen Arbeiten bei den Lesern der Annalen nicht voraussetzen darf, so erlaube ich mir zunächst den wesentlichen Inhalt derselben, insoweit er sich auf die vorliegende physikalische Frage bezieht, hier kurz zusammenzufassen.

1) Wundt, Phil. Stud. 1. p. 495. 1883.

Als sich bei den ersten Versuchen, eine empirische Schallmaasstabelle für psychophysische Zwecke festzustellen, ergeben hatte, dass die Stärke des durch den Fall von Metallkugeln erzeugten Schalles nicht bloß von Fallhöhe und Gewicht, sondern auch von dem Material der Kugel und der Fallunterlage in ziemlich veränderlicher Weise abhängig sei, schlug ich Hrn. Tischer vor, mit Kugeln aus einem und demselben Material auf einigen in ihrer physikalischen Beschaffenheit möglichst abweichenden Unterlagen Versuche auszuführen. Der Hauptzweck hierbei bestand darin, diejenige Versuchsanordnung zu finden, welche durch Gleichförmigkeit und angemessene Abstufung des Schalles zu Beobachtungen über die Unterschiedsempfindlichkeit des Ohres für Schallstärken und über die Zeit der Apperception und Unterscheidung von Schallstärken sich eigneten. Demgemäss wurden alle Versuche mit Bleikugeln ausgeführt, aber der Reihe nach folgende Fallunterlagen gewählt:

1) Das Brett des Hipp'schen Fallapparats, welches bei auffallender Kugel von einem Messingdaumen abgleitet und gegen Messingfedern gepresst wird. Die Kugeln erfuhren hier keine merkliche Deformation, und es fand kein elastischer Rückstoss derselben statt.

2) Ein mit Tuch überzogenes, in etwas geneigter Lage auf Kautschukfüßen stehendes Holzbrett. Die Bleikugeln erfuhren ebenfalls keine merkliche Deformation, wurden aber wie elastische Gummibälle zurückgeworfen.

3) Ein nacktes Brett aus hartem Holze, welches die unter einem Winkel von etwa  $10^0$  geneigte obere Fläche eines Kastens bildete, dessen untere horizontale Fläche auf dem Boden ruhte. Hier fand gleichzeitig Deformation und elastische Reaction statt.

4) Eine Eisenplatte, welche unmittelbar auf dem Boden aufruhte. Hier entstand starke Deformation, aber keine elastische Reaction, sondern die Kugeln blieben, wie bei dem Hipp'schen Brett, unverrückt liegen.

Die physikalischen Bedingungen waren also, wie man sieht, bei diesen Unterlagen dergestalt variirt, dass möglichst verschiedene Antheile der bei dem Fall entwickelten leben-

digen Kraft in Deformation oder in elastischen Rückstoss übergangen. Da nun hauptsächlich diese beiden Vorgänge vermuthlich es bedingen werden, dass sich nicht alle durch das Product  $p \cdot h$  zu messende Energie in Schall verwandelt, so dürften die Resultate dieser Vergleichungsversuche immerhin auch ein gewisses physikalisches Interesse besitzen. Für die Beurtheilung der Resultate wird aber die folgende einfache Erwägung maassgebend sein können.

Irgend eine einzelne Schallintensität  $i$ , welche durch den Fall einer Kugel von der Masse  $p$  von der Höhe  $h$  entsteht, wird immer ausgedrückt werden können durch eine Gleichung von der Form:

$$i = \frac{k}{n} p h,$$

worin  $k$  eine bei allen Veränderungen von  $p$  und  $h$  unveränderlich bleibende Grösse und dagegen  $n > k$  einen Werth bezeichnet, welcher dem durch Deformation, elastischen Rückprall u. s. w. bewirkten Energieverlust proportional geht. Es ist nun an und für sich denkbar, dass auch  $n$  eine Constante sei; es ist ferner denkbar, obgleich nicht wahrscheinlich, dass  $n$  bei den Veränderungen von  $p$  constant bleibt, mit  $h$  aber sich verändert, indem es z. B. fortwährend der Quadratwurzel aus  $h$  proportional ist. Im letzteren Fall würde dann das von Vierordt ursprünglich aufgestellte Schallmaass  $p \cdot \sqrt{h}$  richtig sein. Es ist aber offenbar auch möglich, dass der in Deformation, Rückprall u. s. w. bestehende Verlust an Energie gleichzeitig von  $p$  und  $h$  in einer minder einfachen Weise abhängt. Ist dies der Fall, dann wird man selbstverständlich immer noch für zwei zusammengehörige Versuche mit den Gewichten  $p$  und  $P$  und den Höhen  $H$  und  $h$ , in welchen die verglichenen Schallintensitäten gleich gefunden wurden, eine Gleichung:

$$p H^e = P h^e$$

aufstellen und daraus den Exponenten  $e$  berechnen können. Aber es ist klar, dass dieser Exponent im allgemeinen für jedes neue Versuchspaar wieder einen anderen Werth haben wird, und dass ebenso nicht mehr unter allen Umständen

$\epsilon < 1$  sein muss. Vielmehr wird letzteres nur so lange stattfinden, als in der Beziehung  $\epsilon = \log(P/p) / \log(H/h)$ ,  $H/h > P/p$  ist, d. h. so lange der Energieverlust mit der Zunahme der Höhen stärker wächst als mit der Zunahme der Gewichte. Dies vorausgesetzt sind nun die Resultate unserer Versuche leicht verständlich.<sup>1)</sup> Sie bestehen in Folgendem:

1) Sind Deformation und elastischer Rückstoss beide annähernd gleich Null, so ist  $\epsilon$  constant, und zwar nahezu = Eins. (Unterlage 1.)

2) Ist die Deformation klein, aber der elastische Rückstoss gross, so bleibt ebenfalls  $\epsilon$  fast constant und nähert sich der Einheit; doch ist bei grösseren Höhen und Gewichten ein geringes Anwachsen von  $\epsilon$  mit der Zunahme beider zu bemerken. (Unterlage 2.)

3) Findet gleichzeitig Deformation und elastischer Rückstoss statt, so ist  $\epsilon$  stets  $< 1$ , nimmt aber sowohl mit den absoluten Werthen von  $h$  wie mit denjenigen von  $p$  nicht unbeträchtlich zu. (Unterlage 3.)

4) Verschwindet bei bedeutender Deformation der elastische Rückstoss, so ist  $\epsilon$  im allgemeinen noch kleiner als im vorigen Falle, und die Veränderungen mit  $h$  und  $p$  finden im selben Sinne statt. (Unterlage 4.)

Hieraus ist zu schliessen, dass der elastische Rückprall einen nahezu constanten, die Deformation der Kugel dagegen einen veränderlichen Energieverlust zur Folge hat, welcher letztere mit  $h$  und  $p$ , aber im allgemeinen mit  $h$  schneller als mit  $p$  zunimmt. Für die subjective Vergleichung von Schallstärken erwiesen sich am günstigsten die Beobachtungen mit Unterlage 1 und besonders mit 3. Bei beiden blieb das Timbre des Schalles hinreichend gleich,

---

1) Eine Bemerkung auf S. 474 der Vierordt'schen Abhandlung könnte den Verdacht erwecken, als hätten bei vielen unserer Versuche mehrere Beobachter gleichzeitig Beobachtungen ausgeführt. Dies ist aber nur in einigen Vorversuchen der Fall gewesen, und es ist von Hrn. Tischer ausdrücklich bemerkt worden, dass dieses Verfahren Störungen des Urtheils herbeiführe, weshalb bei den definitiven Versuchen immer nur ein Beobachter die Schallintensitäten verglichen und einer den Fallapparat bedient habe.

und 3 gestattete ausserdem in sehr weitem Umfang eine Abstufung der Schallstärken. Für die psychophysischen Versuche über die Unterschiedsempfindlichkeiten wurde daher 3 gewählt, unter Zugrundelegung empirisch gewonnener Schallmaassstabellen, für die Versuche über Unterscheidungszeiten 1 unter Zugrundelegung der einfachen Maassformel  $i = k \cdot p \cdot h$ . Die Versuche mit 2 gaben zwar gut vergleichbare Schalle, aber der absolute Schallverlust war wegen des starken Rückpralles zu gross. Die Versuche mit 4 waren am unsichersten wegen des begleitenden metallischen Klages, dessen Tonhöhe sich sehr bedeutend mit dem Gewicht veränderte.<sup>1)</sup>

In seiner Besprechung unserer Versuche scheidet nun Vierordt zunächst alle Beobachtungen, in denen  $\epsilon > 1$  gefunden wurde, aus, indem er diese Werthe von  $\epsilon$  als „unmöglich“ bezeichnet. Dass sie dies nicht sind, habe ich oben schon auseinandergesetzt. Uebrigens sind die hierher gehörigen Abweichungen von der Einheit so klein (sie schwanken zwischen 1,02 und 1,2), dass sie fast durchgängig in das Bereich der Beobachtungsfehler fallen. Sodann discutirt Vierordt die Versuche mit Unterlage 2 und kommt zu dem Resultat, dass in ihnen  $\epsilon$  der Constanz ziemlich nahe komme, ein Resultat, welchem ich, wie gleichfalls bemerkt, nicht widerspreche. Die Versuche mit Unterlage 3, welche nicht nur an sich die eingehendsten und genauesten sind, sondern auch allein als Grundlage der nachfolgenden Versuche über Unterschiedsempfindlichkeit gedient haben, übergeht Vierordt gänzlich, weil dabei, wie er meint, „ein mehrfaches Zurückprallen und Wiederaufschlagen der Fallkugeln vorkam.“ Es ist aber von Hrn. Tischer ausdrücklich gesagt worden, dass zur Vermeidung störender Wirkungen dieser Art das Fallbrett unter einer geringen Neigung aufgestellt und von einem Watterpolster umgeben, und dass dadurch die Ent-

---

1) Die Behauptung von Vierordt, dass „bei gehöriger Uebung“ die verschiedene Klangbeschaffenheit nur wenig die Vergleichung störe, steht mit allen Erfahrungen über subjective Intensitätsvergleichung im Widerspruch, und die beträchtlichen Schwankungen der  $\epsilon$ -Werthe seiner eigenen mit Eisenplatten ausgeführten Versuche sprechen nicht für die Richtigkeit dieser Behauptung.

stehung eines jeden Nebengeräusches verhindert war.<sup>1)</sup> Es bleiben so nur die Versuche mit der Eisenplatte 4 übrig, die von uns wegen der störenden Klangunterschiede als ungeeignet zu psychophysischen Maassbestimmungen bezeichnet worden sind. Trotzdem hält Vierordt dieselben für die geeignetsten, um sie einer näheren Discussion zu unterwerfen. Die von Hrn. Tischer mitgetheilten Versuche zerfallen hier in eine dem Nachweis der Veränderungen des  $\varepsilon$  mit  $p$  bestimmte Gruppe (p. 505 u. 506) und in eine einzige Versuchsreihe (p. 507), in welcher er mittelst vergleichender Beobachtungen die aus der Kleinheit des Exponenten  $\varepsilon$  sich ergebende Wahrscheinlichkeit, dass bei Unterlage 4 mit steigendem  $h$  die Grösse von  $\varepsilon$  noch rascher wächst als bei 3, zu bestätigen sucht. Vierordt behandelt nun die erste Versuchsgruppe so, als wenn sie dem Nachweis der Abhängigkeit von  $h$  bestimmt wäre, und zeigt, dass hier eine solche Abhängigkeit nicht nachzuweisen ist, was ihm natürlich leicht gelingt, da in der einen Reihe die Höhe  $h$  überhaupt gar nicht, in den zwei übrigen nur zwischen 15 und 25 bez. 10 und 30 cm verändert ist. Für die Anordnung der beiden letzteren Reihen mag, um nicht zu viel Raum wegzunehmen, die zweite Hälfte der von Vierordt ausführlich discutirten Tab. XII als Beispiel dienen:

$p$	$P$	$P/p$	$h$	$H$	$H/h$	$\varepsilon$
8	12,5	1,56	10	23	2,3	0,587
"	"	"	20	39	1,95	
"	"	"	30	65	2,17	
12,5	25	2,00	10	29,5	2,95	0,683
"	"	"	20	48	2,40	
"	"	"	30	88	2,93	
25	50	"	10	32,5	3,25	0,618
"	"	"	20	54	2,7	
"	"	"	30	97,5	3,25	
50	100	"	20	45	2,25	0,738
"	"	"	30	86	2,87	
100	200	"	20	44,5	2,225	0,867

Hätte es sich wirklich darum gehandelt zu zeigen, dass  $\varepsilon$  mit wachsendem  $h$  zunimmt, wie konnte dann daran gedacht

1) Wundt, Phil. Stud. 1. p. 500. 1883.

werden, die zum selben Gewichtspaar gehörigen, aber bei verschiedenen Höhen erhaltenen  $\epsilon$  zu einem Mittelwerthe zu vereinigen? Das wirkliche Resultat, dass nämlich  $\epsilon$  mit wachsendem  $p$  ziemlich regelmässig (in der 10 Gewichtspare umfassenden Reihe XII von 0,505 bis auf 0,867) ansteigt, verschweigt Vierordt vollständig. Uebrigens ist es begreiflich, dass diese Versuche mit der Eisenplatte von uns nicht weiter ausgedehnt wurden, da sie sich wegen der oben bemerkten Uebelstände nicht als geeignet zu unseren Versuchszwecken erwiesen. Um so mehr ist es zu verwundern, dass Vierordt die Versuche mit Unterlage 3 aus einem Grunde, von dessen Hinfälligkeit er sich beim Lesen der Tischer'schen Abhandlung sofort hätte überzeugen können, völlig ignorirt, obgleich doch schon die viel grössere Regelmässigkeit der Zahlen ihn auf die grössere Genauigkeit der Schallvergleichung hinweisen musste. Ich darf mir daher wohl gestatten, dies nachzuholen und eine der Maasstabellen über die Veränderungen der  $\epsilon$ -Werthe hier mitzutheilen. In der oberen Horizontalcolumnne sind die zu einem Versuchspaar gehörigen Gewichte  $P/p$  in Grammen, in der Verticalcolumnne links die entsprechenden Höhen  $H/h$  in Centimetern verzeichnet.

	200 100 g	100 50 g	50 25 g	25 12 g	12 6 g	6 3 g	3 1 g	1 0,3 g
$^{100}_{50}$ cm	1,00	0,98	0,97	0,96	0,92	0,89	0,85	0,82
$^{70}_{30}$ cm	0,98	0,96	0,95	0,93	0,86	0,80	0,76	0,74
$^{35}_{10}$ cm	0,88	0,86	0,83	0,81	0,78	0,73	0,70	0,66

Diese Zahlen, mit denen die von vier weiteren von Hrn. Tischer auf p. 513 seiner Abhandlung mitgetheilten Tabellen übereinstimmen, bedürfen keines Commentars. Die gleichzeitige Abhängigkeit der  $\epsilon$  von  $h$  und  $p$  springt unmittelbar in die Augen.

Aber nicht blos unsere Beobachtungen beweisen, dass  $\epsilon$  keine Constante ist, sondern auch Vierordt's eigene Versuche führen zu diesem Resultat, insoweit dies bei der Art der Ausführung derselben überhaupt möglich ist. Denn allerdings sind die Höhenabstufungen hier so gering, dass

man schwer begreift, wie derartige Versuche ausgeführt werden konnten, um die Veränderlichkeit von  $\varepsilon$  mit der Höhe zu prüfen. Vier Versuchsreihen sind mitgetheilt. In der ersten und vierten bewegen sich die Fallhöhen  $h$  der schwereren Kugel zwischen 5 und 30 Millimetern. Ebenso im grössten Theil der zweiten; nur zweimal erhebt sich hier  $h$  auf 130 mm; in der dritten sind 60 und 80 und einmal 140 mm die Maximalzahlen für  $h$ . Dass diese Versuche mit den unseren, in denen die Höhen in der Regel zwischen 10 und 100 cm variiren, nicht vergleichbar sind, ist selbstverständlich; ebenso dass man innerhalb so geringer Höhenänderungen keine erheblichen Veränderungen von  $\varepsilon$  erwarten darf. Dass sich aber, wenn man eine Kugel aus freier Hand 5–30 mm hoch herabfallen lässt, die Fehler der Höhenbestimmung mässig geschätzt auf 25–50% belaufen können, bedarf keiner näheren Ausführung. Wenn trotzdem die erste und vollständigste Versuchsreihe Vierordt's ein so deutliches Zeugniß für das auch in unseren Versuchen gefundene Anwachsen von  $\varepsilon$  mit dem Fallgewicht ablegt, so ist dies unter solchen Umständen beinahe zu verwundern. Diese Reihe (Bleikugeln auf eine Zinkplatte fallend) beginnt mit einem Gewichte  $P = 180$  100 mg und hörte auf mit  $P = 74$  mg. Dabei sinken continuirlich die Mittelwerthe von  $\varepsilon$  von 0,800 an bis auf 0,582.

Die wirklichen Ergebnisse der Vierordt'schen Versuche scheinen mir demnach die folgenden zu sein: 1) auf eine Abhängigkeit des  $\varepsilon$  von der Fallhöhe lassen sie nicht schliessen, weil die Variation der Fallhöhen eine zu geringe ist; 2) aus ähnlichen Gründen lassen einige seiner Versuchsreihen auch keine deutliche Abhängigkeit von den Gewichten hervortreten; dagegen zeigt 3) die vollständigste und regelmässigste dieser Reihen, dass bei dem Fall von Bleikugeln auf eine metallische Unterlage  $\varepsilon$  mit wachsendem Gewicht beträchtlich zunimmt. Die von Vierordt gezogene Folgerung „es gibt ein allgemeines Schallmaass“ wird daher richtig, wenn man sie in ihr Gegentheil verwandelt: „es gibt kein allgemeines Schallmaass“. Dies schliesst natürlich nicht aus, dass nicht innerhalb gewisser Grenzen von  $p$  und  $h$  der Exponent  $\varepsilon$  hinreichend constant bleiben



kann, um von seinen Veränderungen abstrahiren zu dürfen. Da aber diese Grenzen bei der Wahl relativ harter Unterlagen, wie sie zur Vermeidung allzu grosser Energieverluste für die meisten Zwecke gewählt werden müssen, und bei der Anwendung von Bleikugeln, die sich wegen der Leichtigkeit der Gewichts correction besonders empfehlen, ziemlich enge sind, so wird es hier stets erforderlich sein, phonometrischen Versuchen eine zuvor festgestellte empirische Schallmaass-tabelle zu Grunde zu legen. Wenn Vierordt eine solche schliesslich dadurch glaubt vermeiden zu können, dass er sich „auf Fallräume zwischen 0,5 bis 3,0 cm beschränkt, weil diese allein bei fast allen phonometrischen Versuchen in Frage kommen“ (p. 486), so bleibt nur zu bedenken, dass phonometrische Versuche, die unter diesen Bedingungen an- gestellt sind, überhaupt kaum einen Werth haben können, weil bei so geringen Höhen die Versuchsfehler eine unver- hältnissmässige Grösse erreichen müssen.

#### **X. Experimente, den Magnetismus betreffend; von Frankenbach.**

1. Die bisher übliche Methode den Verlauf magnetischer Curven und die Wirkungssphäre eines Magnets überhaupt experimentell nachzuweisen, beziehungsweise anzudeuten, besteht darin, dass Eisenfeilspähne auf ein über den Magnet ge- legtes Kartenblatt gestreut werden, und ist insofern mangel- haft, als die auf dem Papier liegenden Eisenfeilspähne infolge ihrer Reibung sowohl untereinander als auch mit dem Papier ihre freie Beweglichkeit verlieren. Zur Vermeidung dieses Uebelstandes lege ich den Magnet unter einen mit Wasser gefüllten Glasteller und bestreue die Oberfläche des Wassers mit Eisenfeilspähnen (welche bei vorsichtigem Bestreuen auf dem Wasser schwimmen). Infolge der Einwirkung des darunter befindlichen Magnets gruppiren sich die Eisenfeilspähne zu den schönsten Curven, welche sowohl je nach Form, Grösse und Stärke des angewandten Magnets, als auch je nach

Grösse und Reinheit der Eisenfeilspähne variiren und die auf Papier herzustellenden Figuren an Vollkommenheit, Regelmässigkeit und Genauigkeit bedeutend übertreffen. Besonders schön gruppirt sich eine dünne Schicht von feinem, chemisch reinem Eisenpulver (*Ferrum reductum*).

Auch dieses Verfahren auf natürliche Magnete, magnetisirte Eisenplatten und Ringe angewendet, liefert interessante Resultate.

2. Streut man auf die Oberfläche von ruhig stehendem Wasser Eisenfeilspähne (welche darauf schwimmen), so bleiben dieselben nicht etwa ruhig liegen, sondern werden unter dem Einfluss des Erdmagnetismus zu Magneten und gruppiren sich infolge gegenseitiger Anziehung und Abstossung zu wunderschönen, krystallinisches Gepräge tragenden Figuren. Bei Anwendung gröberer Feilspähne möchte ich die Figuren mit einer Wasseroberfläche vergleichen, die im Begriffe steht zu gefrieren, während sie bei feinerem Eisenpulver mit einer matt angehauchten, im Gefrieren begriffenen Fensterscheibe zu vergleichen sind.

Liegnitz, im November 1882.

#### Berichtigungen.

Bd. XVI. (Grossmann) p. 627. In Gl. XI sind die Grössen  $p_2$  und  $q_2$  durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$p_2 = r \sqrt{\frac{\rho_2}{\mu_2}}, \quad q_2 = r a \sqrt{\frac{\rho_2}{\mu_2}}.$$

Bd. XVII. (Colley) p. 65 Z. 12 v. u. lies  $l \dots$  war 1,80 statt  $l \dots$  war 1,08. p. 65 in den Formeln lies überall  $R$  statt  $K$ .

Bd. XVII. (Braun) p. 601 Z. 10 v. o. lies Silber statt Platin.

Bd. XVIII. (Bohn) p. 348 Z. 12 lies  $\frac{l^3}{m \ell^2}$  statt  $\frac{l^3}{m^2}$ .

Bd. XVIII. (Vierordt) p. 476 Z. 11 v. u. lies: die  $\varepsilon$ -Werthe über Eins sind also sozusagen objective Beweise, dass auch die weiteren übrigen  $\varepsilon$ -Bestimmungen zu hoch sind, statt: die  $\varepsilon$ -Werthe über Null.

ie  
it,  
e-  
m,

e-  
te

m  
ei-  
er  
p-  
ng  
i-  
ie  
e-  
er  
r-

92

08.

ins  
ei-  
die

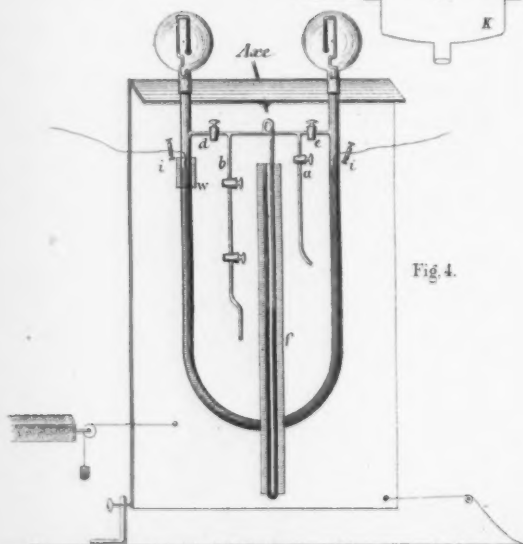
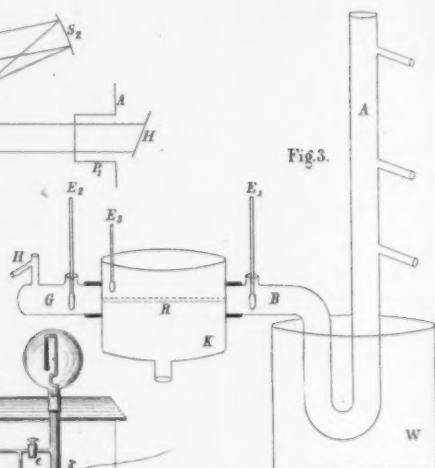
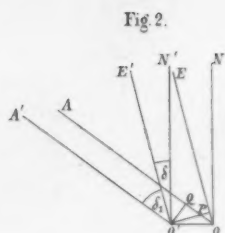
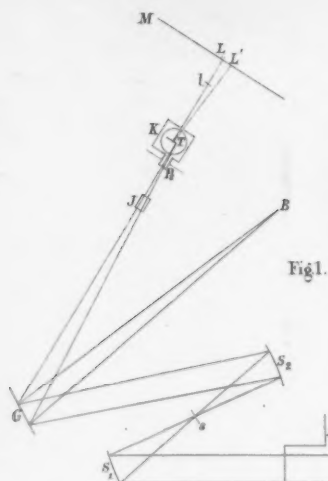


Fig. 6.

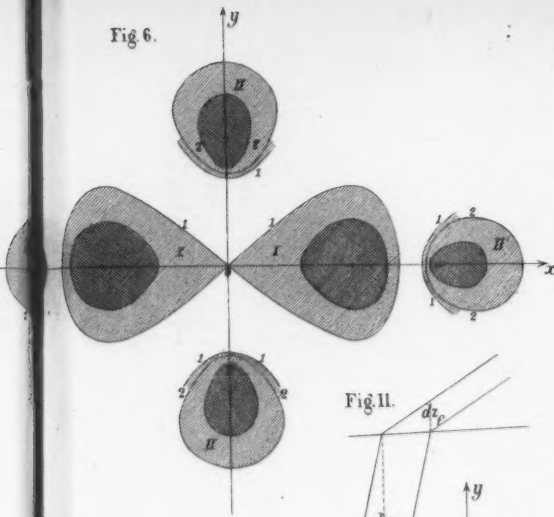


Fig. 5.

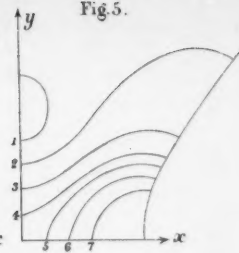


Fig. 7.

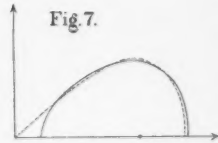


Fig. 11.

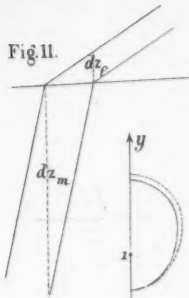


Fig. 8.

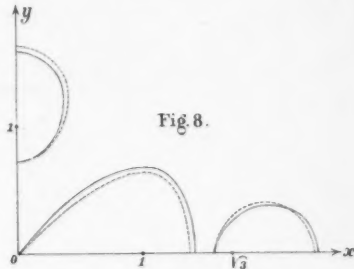


Fig. 10.

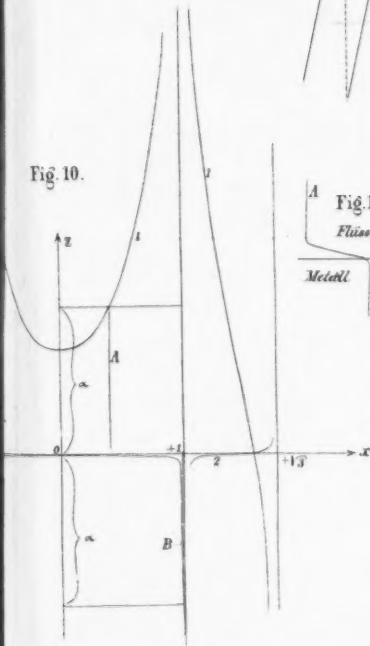


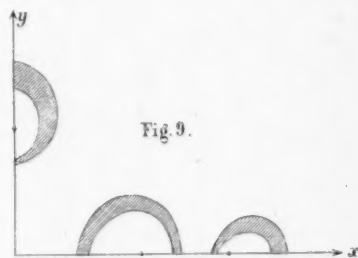
Fig. 12.  
Flüssigkeit.

Metall

A

B

Fig. 9.



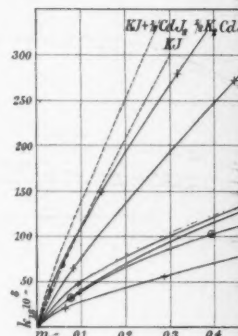
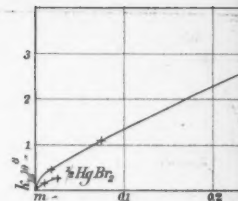
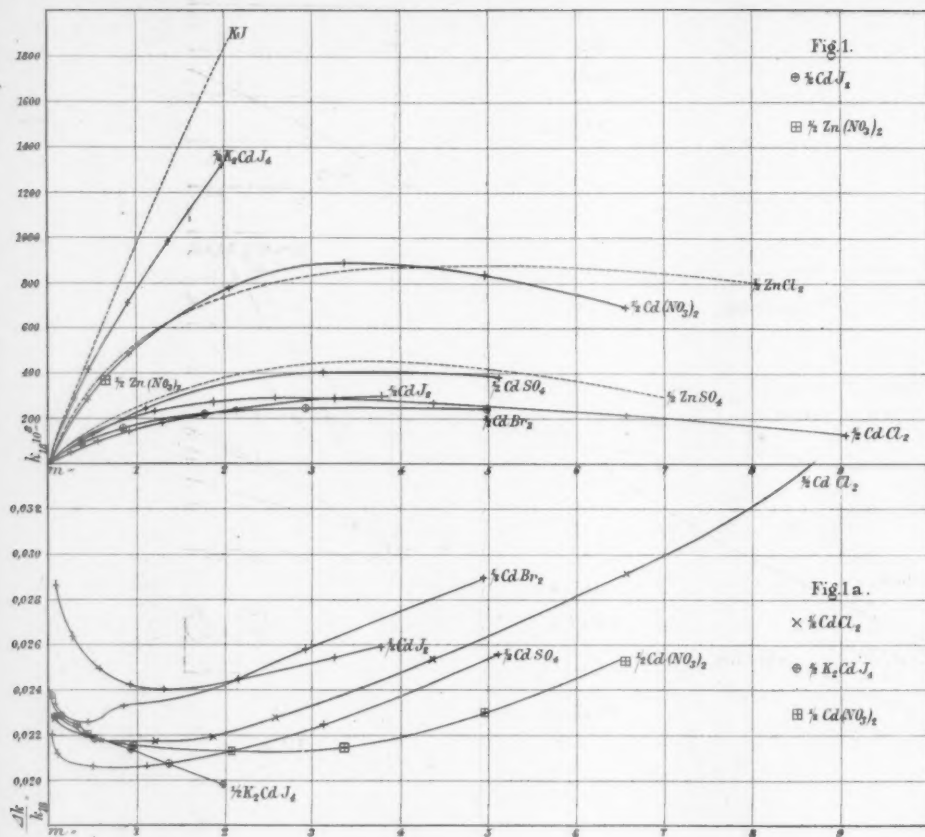


Fig. 4.

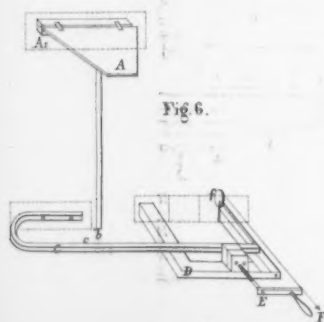


Fig. 6.

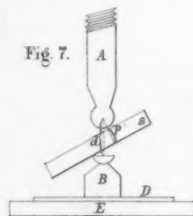


Fig. 7.

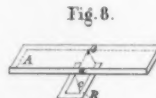
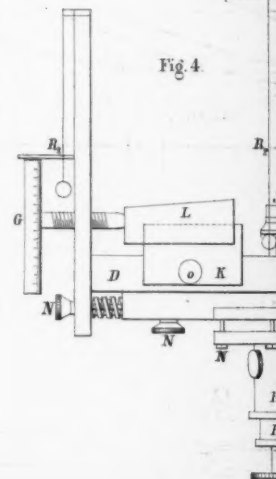


Fig. 8.



Grottrian Fig. 1-3. Koch Fig. 4-8.

Fig. 2.

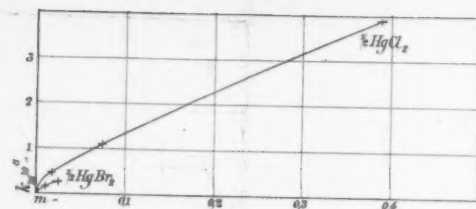


Fig. 3.

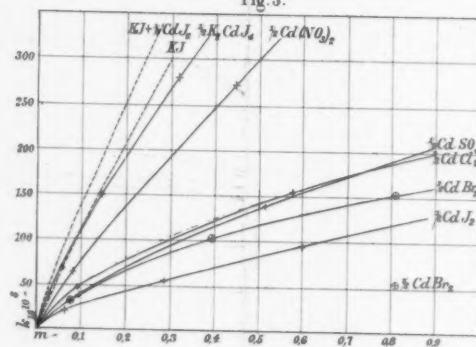


Fig. 1.

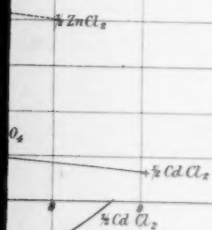
⊙  $\frac{1}{2} \text{CdJ}_4$ ⊠  $\frac{1}{2} \text{Zn}(\text{NO}_3)_2$ 

Fig. 1a.

×  $\frac{1}{2} \text{CdCl}_2$ ⊙  $\frac{1}{2} \text{K}_2 \text{CdJ}_4$ ⊠  $\frac{1}{2} \text{Cd}(\text{NO}_3)_2$ 

Fig. 6.

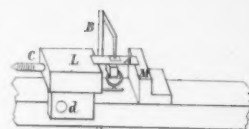
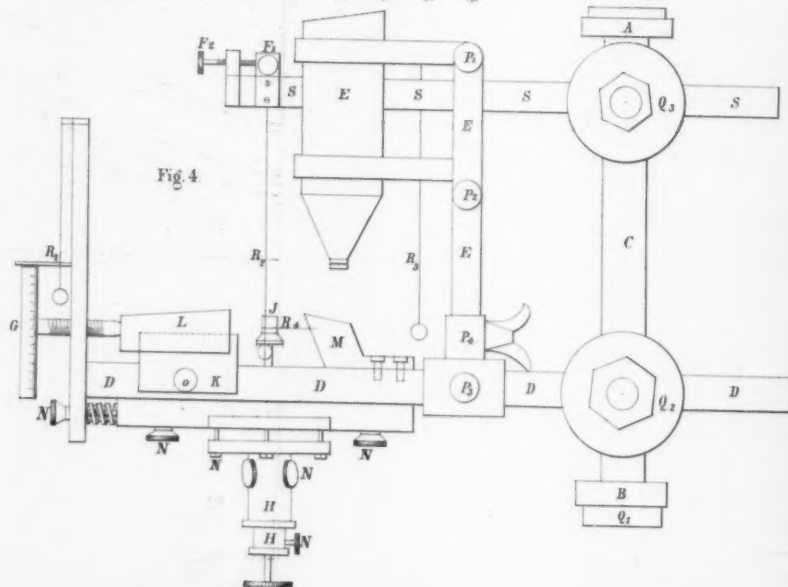
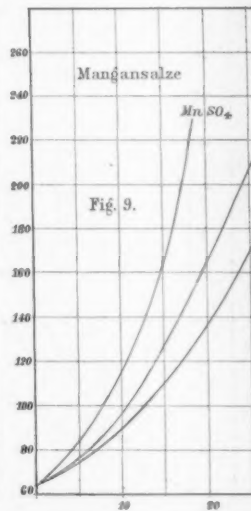
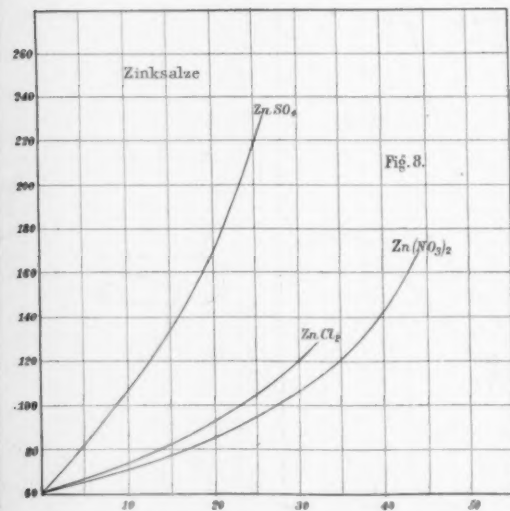
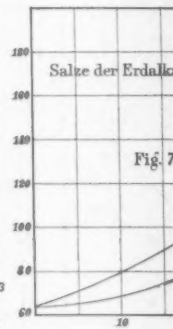
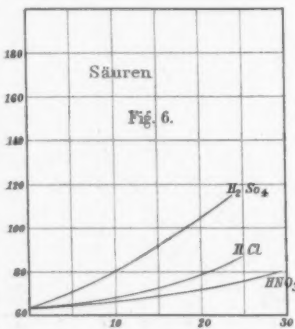
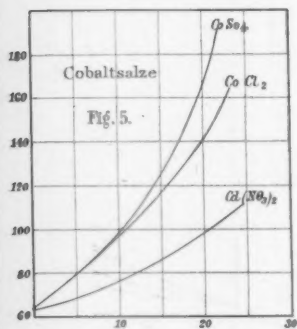
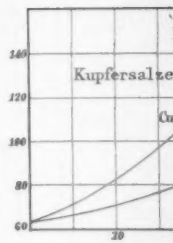
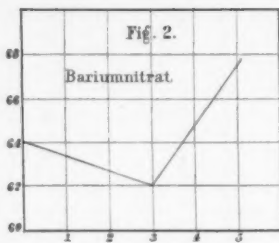
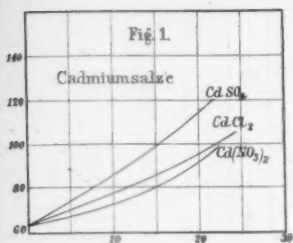


Fig. 5.

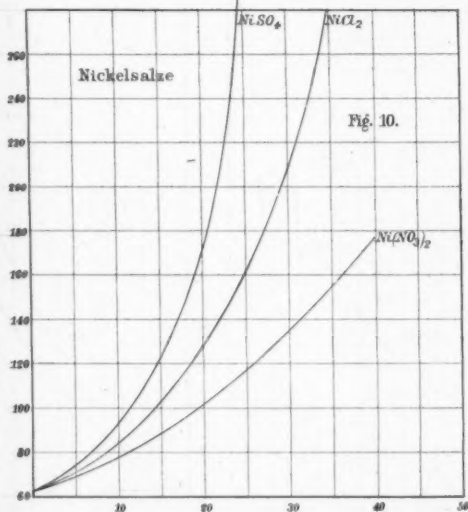
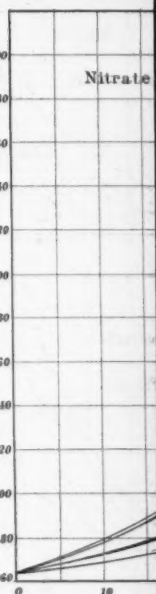
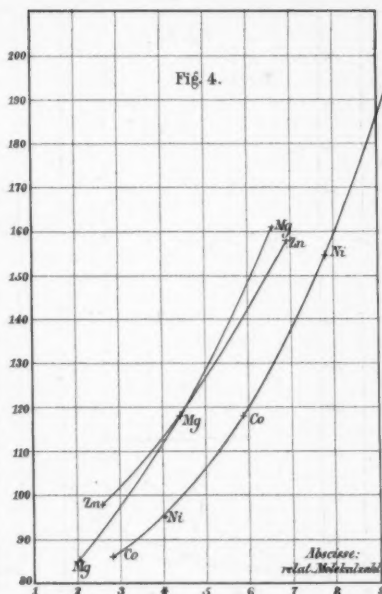
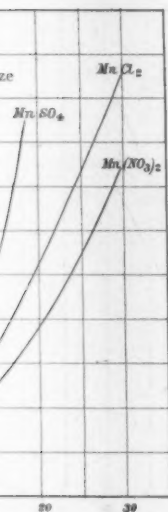
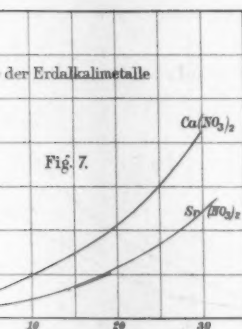
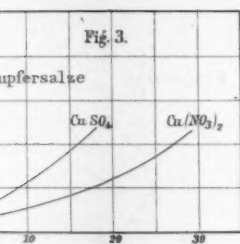
Fig. 4.



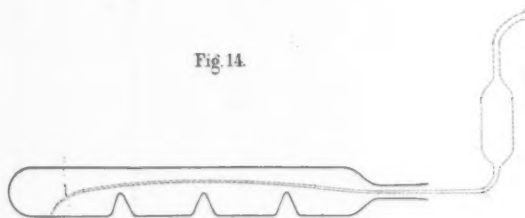
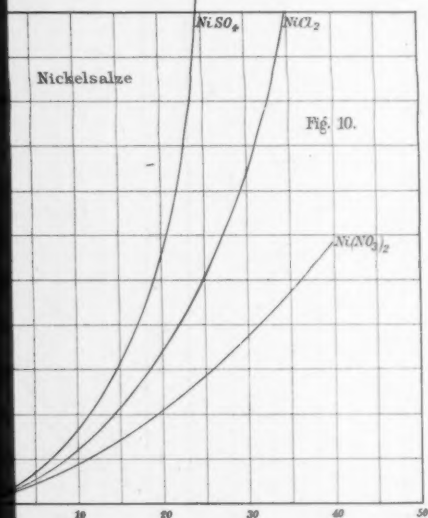
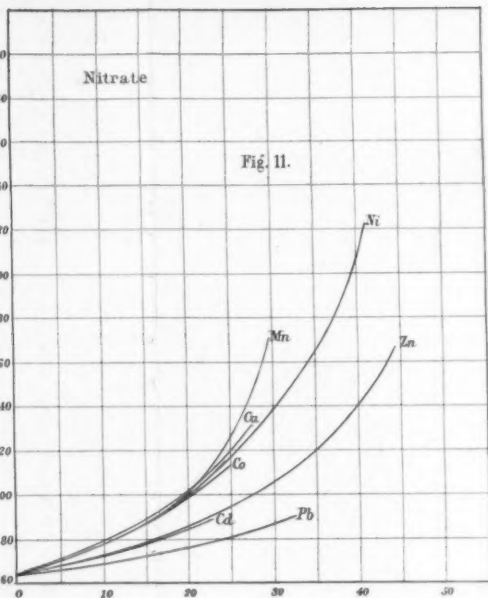
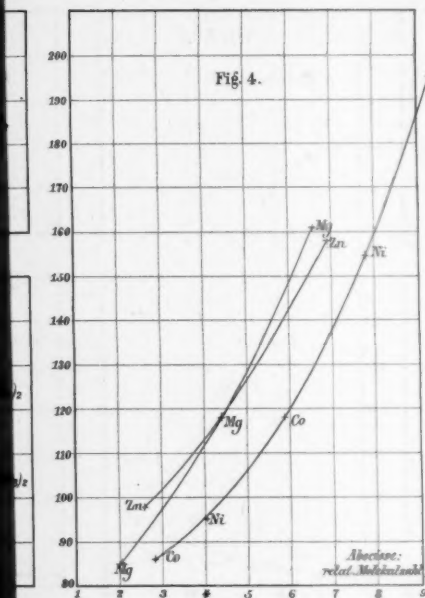




Abscisse: Procentgehalt. Ordinate

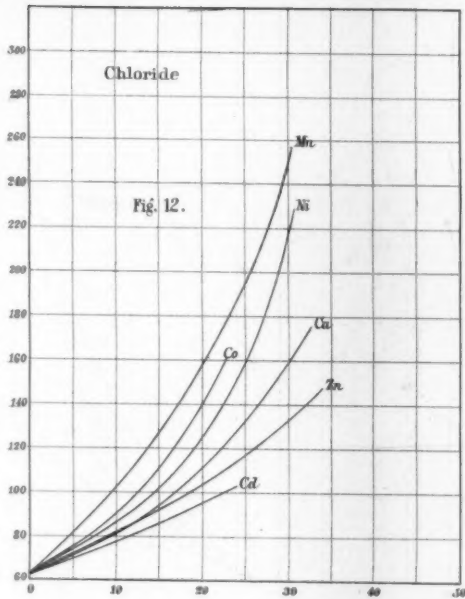


Abscisse: Procentgehalt. Ordinate: Zähigkeit.



Chloride

Fig. 12.



Sulfate

Fig. 13.

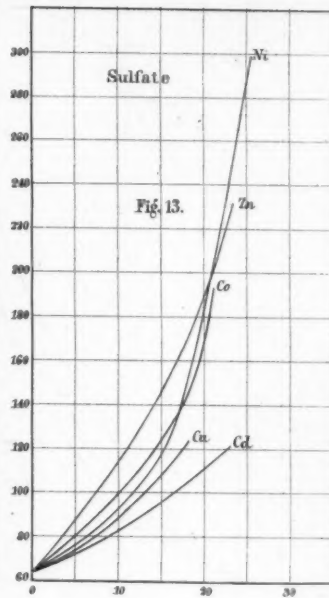


Fig. 15.

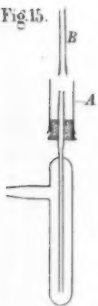
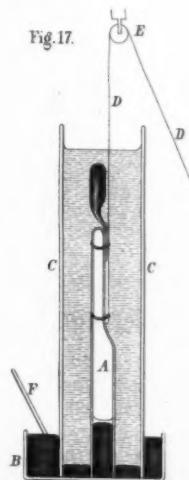


Fig. 16.



Fig. 17.



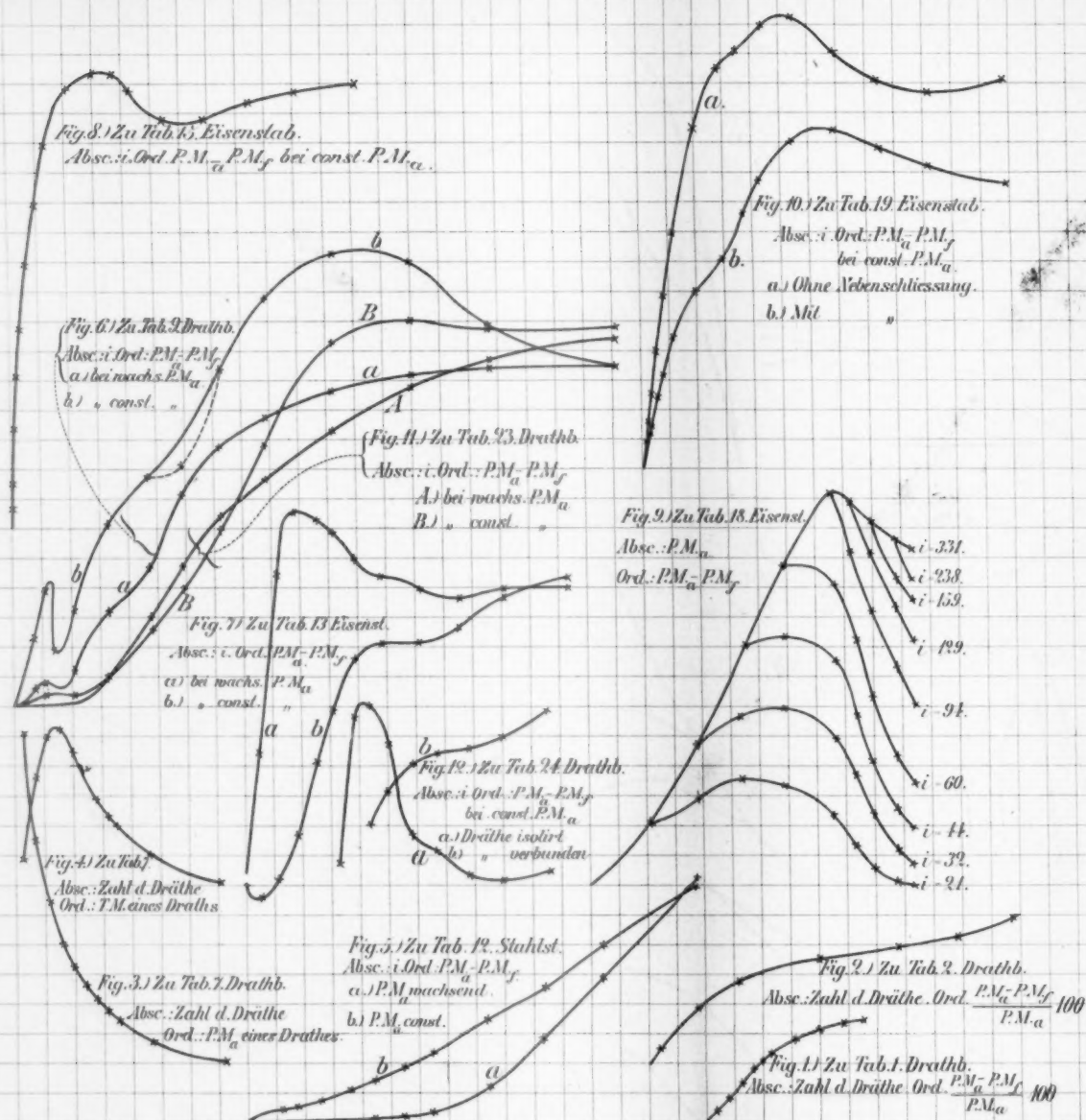


Fig. 3.

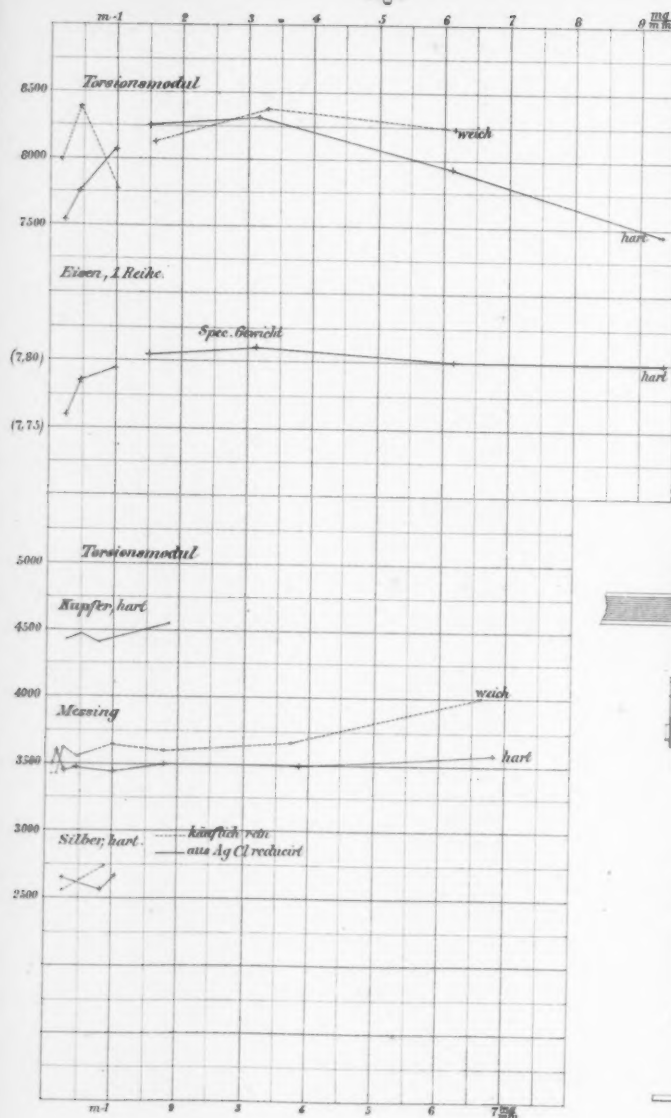


Fig. 4.

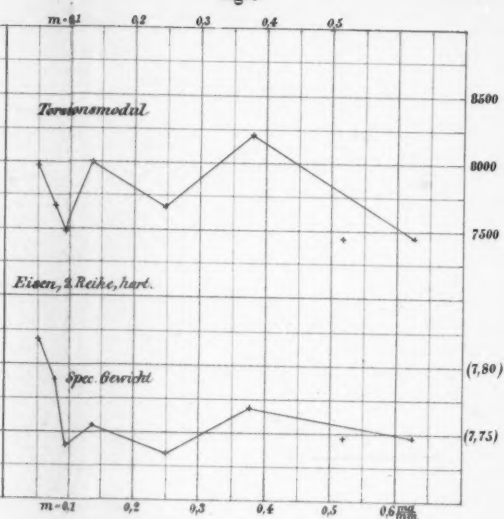


Fig. 2.

